



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

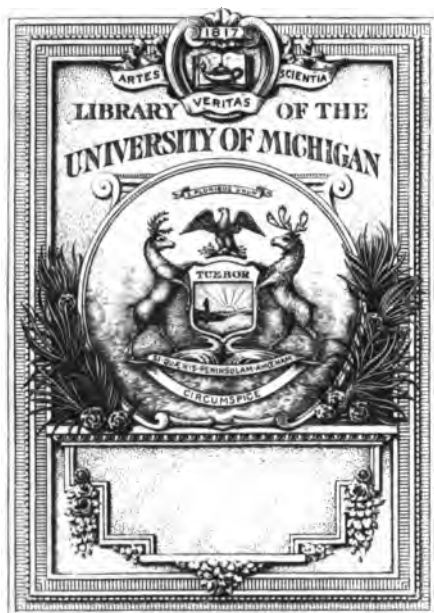
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



QA

33

.C67

P. 991.

HENRICI COETSII
**ARITHMETICA
PRACTICA**

Continens

**Regulas Arithmeticas ex suis principiis
deductas, demonstrationibus con-
firmatas & variis Exemplis
illustratas.**

Quibus accedit

TABVLA QVADRATORVM

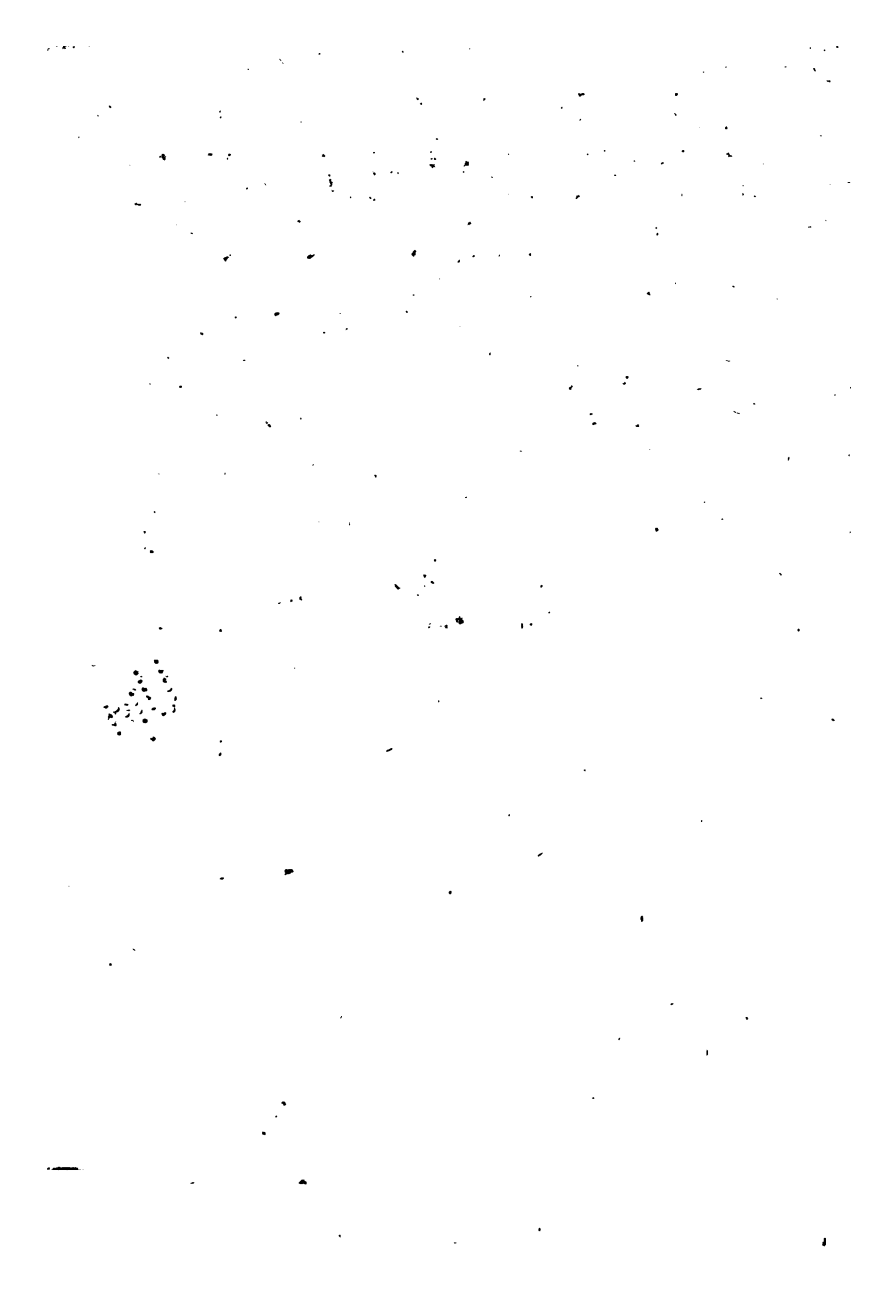
a 1 usque ad 3000,
ut &

C V B O R V M

ab 1 usque ad 1500.



AMSTELODAMI,
Apud HENRICUM & Viduam THEODORI BOOM,
M DC XCVIII.



Illustrissimis, Nobilissimis Amplissimisque

Hist. Jaci.

Reichmann

9-11-35

VIRIS

30819 Academiae Lugduno Batavae

CVRATORIBVS

ac

VINCLYTÆ HVIVS

VRBIS CONSVLIBVS.

nec non

Gravissimo, Prudentissimoque Viro.

Qui iis est à Secretis

*Hoc opus & se ipsum dicat
& devovet*

H. COETSIVS.

Strisani Viri

Inta, ingenue fateor, animo
meo infixæ est Illustrissimo-
rum Vestrorum Nominum re-
verentia, ut diu hæserim du-
ius nimiane reum me facerem proca-
iæ, si ad Vestros pedes deferrem hoc
væum Opusculum, magni certe mo-
nenti, si materiam spectetis; minoris
autem forsitan si perpendatis, quam levi-
tate potest privatis tantum collegiis accom-
modato, ea sit delineata penicillo. Ve-
rum enim vero animos addit & audenti-
orem me facit haud mediocris istius me-
moriæ benevolentia, qua Euclidis Geo-
metriæ Elementa, circa elapsi jam pro-
xime lustri initium à me sub Vestris
Auspiciis edita, accipere voluistis. Qui-
bus cum hæc Arithmetice Elementa
tam arcto & quasi affinitatis vinculo
conjuncta sint, ut ab invicem non nisi
vi

vi divelli se patiantur, haud levem concipio fiduciam, Illustrissimi Viri, Vos eodem cum favore hunc meum aspecturos laborem, quo priorem Tractatum existimastis dignum. Destinatus quippe est particularibus eorum progressibus, quibus in Academia Batava, ut civibus degentibus, non minori quàm paterna Vestra cura gaudere datum est, qua per omne studiorum suorum curriculum magis animati ac alacriores redditi, ad summa Reipublicæ & Ecclesiæ munera affurgant & adolescant. Quorum fælicior & uberior proveniunt cum unicum Curæ Vestræ faciat scopum, ingratus minime Vobis esse poterit labor illorum ac Zelus qui Juventuti ad Vestram Academiam tanquam verum Eruditionis & Sapientiæ Templum accedenti facem accendunt viamque monstrant, qua certis ac minime titubantibus vestigiis ad ulteriora semper possit progredi: donec tandem ad suorum votorum Summam perdu-

Etia, prosperum studiorum successum
non magis illis quorum opera usi sunt,
quam Vestrae Curae acceptum ferat.
Quare si Vobis hoc meum Opusculum
prolixo Vestro favore ac valido pla-
ceat honorare patrocínio, haud exi-
guum mihi, relictis jam universae Ma-
theseos, Elementis, ad altiora dabitur
incitamentum. Quod jam superest,
Deum Ter Optimum maximum quam
possum calidis veneror votis, Illustri-
fimi Viri, Ut Vos Reipublicae & Ec-
clesiae bono diu superstites esse jubeat.

AD LECTOREM.

ANTE aliquot annos Geometrica Euclidis Elementa in lucem edidi, quorum forse cum hucusque non infelicem fuisse deprehenderim exemplaribus quippe jam maximam partem distractis, haud ingratum fore credidi, si istis Tractatum hunc adjungerem comitem, qui Arithmetica Elementa debita perspicuitate proponeret; Regulas ac succinctis demonstrationibus muniret, easque sufficienti exemplorum copia illustraret. Quem laborem tum ipsa materia, tum meum vivendi institutum a me efflagitare videntur; primam rationem exhaurit arctissima Arithmetica & Geometria cognatio, quam considerantes Antiquiores duarum istis alarum non sine fundamento dederunt nomen, quarum remigio Mathematici terram quasi emensi, per ipsum aera calum versus avolant. Et procul omni dubio sicut Geometria Arithmetica auxilio destituta manca est aliquo modo; ita vice versa in quamplurimis Arithmetica Geometricis considerationibus perficitur. Totus fere Euclidis Liber Secundus a demonstrationibus Arithmeticis haud exiguum mutuatur lucem; quemadmodum e contra plures Regulae & Quaestiones Arithmeticae operationibus Geometricis non sine fructu sapissime illustrantur ut apud plurimos videre est, Quare cum Ego Juventutis institutioni me totum addiderim, mei muneri esse putavi Geometricae Arithmeticae subungere principia: Haud diffiteor esse multos qui hanc materiam studio & labore suo existimarunt dignam; cum autem alii ex illis prolixius, alii compendiosius scripserint, quam privata Collegia possunt; non sine ratione animum ad hoc opusculum edendum appulisse me credo. Nihil melius nos ad praxin deducit quam clara & succincta Regula, quarum demonstratio cum ab omni dubitatione ac fluctuatione praestet nos liberos; Exempla

AD LECTOREM.

pla certe facilem & expeditum operandi habitum nobis conciliant : utrum autem omni in parte satisfecerim , non meum sed tuum esto iudicium. Licet hoc unum asserere audeam , me dicta sic Regula de quinque vel de pluribus hand contemnendum applicuisse compendium , quo molesta illa ac difficili inter Regulam directam & inversam sublata distinctione , totius Operationis progressus meliori ordine disponitur , & quaesitum multo expeditius obtrinetur , Id quod uno tantum verbo monuisse Te sufficiat , Benevole Lector , in ipsius Regula exercitio & aliorum comparatione rem ipsam clarius experturum. Totum autem Tractatum in tres divido partes. Prima continet Operationum simplicium quinque vulgo dictas species. Numerorum Rationes & inde emergentes compositas operationes , qua Regulas Arithmeticas constituunt comprehendit Secunda. Tertia tractandas sibi sumit Progresiones tum Arithmeticas , tum Geometricas cum subsequentibus Combinationibus & Permutationibus ; Et ne jucunda divinandi destitueretur scientia , illam quoque aliquot exemplis illustrat ; Cum autem nemini lateat , quantum usum & commodum per totam Mathesin praestent Quadratorum & Cuborum Tabula , qua non nisi grandioribus Voluminibus inserta , nimio alias pretio comparari debent ; ea etiam in parte tuo desiderio minori cum expensa tertia hac & Ultima satisfacit Sectio. Non autem diutius te morabor , Lector Benigne , postquam rogavero , ut hunc meum laborem in tuum commodum vertas , & eo , quo Tibi offertur , animo accipere velis.

ARITH-

ARITHMETICA PRACTICA.

P A R S I.

*Continens Naturam Specierum Arithmetica-
rum, earumque in Numeris tam Inte-
gris quam Fractis Exercitium.*

C A P U T I.

*Scientiarum Mathematicarum Divisio. Arith-
metica Definitio.*



ulgo & maxima cum ratione disciplinæ Ma-
thematicæ dispescuntur in Puras & Mixtas.

Puræ dicuntur illæ, quæ Objectum suum,
scilicet quantitatem absolute consideratam
tractant, prout à materia abstrahitur.

Mixtæ in quibus præter considerationem quantitatis
(sive multitudo illa fuerit sive magnitudo) etiam subiectum
cui inest, spectatur.

Sic quando in Arithmetica docetur quinque & tria si-
mul juncta facere octo; isti numeri adeo generaliter & se-
paratim ab omni subiecto intelligi debent, ut ista positio
singulis particularibus subiectis eadem cum veritate appli-
cari possit. Pariter enim verum est, sive de Angelis, sive

de Hominibus, sive de bestiis, sive de aliis quibuscunque rebus agatur.

Non secus si Geometria tradat Circuli Peripheriam ubique à suo centro æqualiter distare, adeoque omnes ejus radios inter se esse æquales. Subjectum de quo hic est sermo, nullum est aliud præter Circulum pure & abstracte consideratum absque alia aliqua materia cui ille inesse concipitur.

Sive enim istum Circulum imaginemur in Cælis, sive in terra, sive in aqua, sive in ligno aut alia quapiam materia ipsum spectemus, ista positio in uno & altero subjecto eadem veritatis luce fulgebit.

Ex quibus patet Disciplinas Mathematicas Puras de ipsis quantitibus tantum in se spectatis agere, nullius omnino subjecti immista consideratione.

Longe vero aliter res se habet in Disciplinis Mixtis. ubi natura & proprietates Figurarum Mathematicarum non abstracte sed in determinato aliquo Subjecto spectantur.

Sic Geometria Practica lineas Rectas, Curvas, Circulos, Quadrata, Rectangula considerat in Terra, Astronomia Motus Astrorum, Planetarum Circulares, Ellipticos in Cælo; Architectura Civilis structuram suam figuris Mathematicis decoratam in ligno, lapide aut alia materia Ædificationi inserviente conspiciendam præbet; militaris vero easdem in terræ congesta mole nostris exponit oculis. Et sit porro de cæteris.

Mathematicæ autem Scientiæ puræ duæ tantum sunt. Arithmetica & Geometria; Quarum illa tractat de quantitate discreta sive Numero, Hæc autem de quantitate continua.

Hanc Arithmeticam penitus inspicere, Numerique; illius Objecti naturam & Affectiones proprius confide-

derare impræsentiarum visum est.

Arithmetica ab ἀριθμός (quæ vox Numerum denotat) dicta est Scientia Numeri, quatenus est numerabilis; vel Scientia bene numerandi.

Numeri vero principium Unitas dicitur scilicet positivum.

Unitas est secundum quam, unumquodque Unum dicitur.

Numerus est ex Unitatibus composita Multitudo.

Cujus Euclidæ definitionis verbis quidam mordicus inhærentes putant Unitatem, utpote multitudinem non constituentem inter Numeros non esse recensendam, adeoque Numerum minimum esse Binarium; Contra quam alii sentiunt, unitatem non minus quam Binarium, Ternarium, &c. Numeris annumerantes, cum per illam non minus, quam per hos respondeatur ad quæstionem Quot sunt?

Quare recte dicitur Unitas numerus omnium minimus, seu numeri principium positivum vel affirmativum: ut est numerus primus, cum sit revera minimum quod reponitur Quæstioni. Quam multi, adeoque minima multitudo.

Diffiteri interim non possumus haud raro Nullum quæstioni Quot sunt vel quam multa? legitimum & veritati conveniens dare responsum, adeoque eandem jure merito sibi vindicare debere prærogativam cum Unitate, sitam in eo, ut non minus quam illa in Numerorum recipiatur ordinem.

Verum enimvero cum rem ipsam attentiori mentis acie contemplemur, longe aliter illam sese habere statim comperiemus.

Licet enim ad quæstiones Quot homines in platea vagantur,

gentur, vel quot in Templo reperiantur, sæpe responderi possit Nullus, & hoc vere, cum sit maxime contingens, quia tamen responsio est negativa & omnem excludit multitudinem, imo & minimam, idcirco Nullitatem numeris accensendam esse jure merito negari posset.

Est enim Nullus idem quod ne ullus, vel ne unulus, adeoque quod ne unus.

Sed hac de re contentionis ferram reciprocare operæ pretium non esse putamus, cum omnem superfluam prolixitatem refugere & brevitati studere utilius longe sit visum.

C A P U T I I.

Numerorum Procreatio, Dispositio. Valor & Enuntiatio.

Cum ex Euclidæa definitione pateat numerum esse ex Unitatibus compositam multitudinem, seu potius unitatem apponere unitati, sequitur etiam pro diversa unitatum multitudine, diversas oriri numerorum species, quilibet scilicet unitatis accessione numerorum speciem mutante.

Quando itaque Nulli seu nihilo apponitur Unitas, oritur Numerus, qui dicitur Unum; Cui si adjungatur alia Unitas, generatur Numerus Binarius; Si huic accedat alia, fiet Ternarius; Qui cum alia Unitate adjecta constituet Quaternarium. Qua ratione similiter procreantur Quinarius, Senarius, Septenarius, Octonarius, Novenarius, & sic porro.

Qui

De Numeror. Ordine & Enuntiatione. 5

Qui numeri hisce characteribus Arabicis exprimuntur.

- 1 Unum
- 2 Duo
- 3 Tria
- 4 Quatuor
- 5 Quinque
- 6 Sex
- 7 Septem
- 8 Octo
- 9 Novem
- 10 Decem

Quia jam patet continua unitatis adjectione in infinitum diversos acquiri numeros, illis etiam in infinitum diversa attribuenda essent nomina. Cui difficultati remedium haud satis mirandum adhibuit Antiquorum industria, quo infinitos istos numeros finitis vocabulis iisque non multis designare possimus.

Scilicet quando ab unitate, continua unitatis additione ad numerum denarium venimus, repetita toties eadem adjectione unitatis acquirimus duos denarios seu duas decades; quas numerum singularem itidem apponendo porro sequuntur tres decades: à quibus digressi accedimus ad quatuor decades, quas excipiunt decades quinque, tum sex, septem, octo, novem, decem. Qui ordo brevius exprimitur hisce vocabulis, Decem, Viginti, Triginta, Quadraginta, Quinquaginta, Sexaginta, Septuaginta, Octoginta, Nonaginta, Centum.

Deinde continua Unitatum & inde resultantium Decadum adjunctione à Centum seu Centuria Una transimus ad Centurias duas; quas tum porro sequuntur Centuriæ tres, quatuor, quinque, sex, septem, octo, no-

ven, decem : quæ series contractius sic effertur ; Centrum , Ducenta , Trecenta , Quadringenta , Quinginta , Sexcenta , Septingenta , Octingenta , Nongenta , Mille.

Sic post mille, seu unum numerum millenarium, eodem quo ille generatus fuit, generatur & alter, ut obtineamus duo millia, quæ excipiunt tria Millia, quatuor Millia, quinque Millia, sex Millia, septem Millia, octo Millia, novem Millia, Decem Millia. & sic porro usque ad centum millia : quibus si deinde novies centum millia adjiciantur fiunt Millena millia, seu brevius Millio ; & sic deinceps in infinitum.

Unde patet in ista dispositione Numerorum continuo servari proportionem decuplam, cum decem Unitates constituant unam Decadem ; decem Decades unam Centuriam ; decem Centuriarum unum Millenarium, seu unam Chiliada ; decem Chiliades unam Decadem Millium. decem decades millium unam centuriam Millium ; decem centuriarum Millium unam Millionem, & sic porro.

Quæ proportio decupla etiam observanda est in dignoscendo valore numerorum, qui in iis non semper idem est, sed semper mutatur pro ratione loci, quem occupant.

Quilibet enim numerus positus loco primo (procedendo à dextera versus sinistram) significat unitates ; secundo loco tot decades, quot continet unitates ; tertio loco tot centurias ; quarto tot millia ; quinto tot decades nullium ; sexto tot centurias millium ; septimo tot mille millia seu millions, quot continet unitates ; & sic porro in locis sequentibus numerorum valor juxta decuplam in infinitum procedit proportionem.

De Numeror. Ordine & Enuntiatione. 7

Sit Ex. Gr. propositus Numerus sequens: in quo prima nota 5 significat quinque unitates, secunda 9 facit novem decades unitarum, hoc esse 90. nonaginta; tertia 8 valet octo centurias, hoc est, 800 octingenta; 4 significat 4000 quatuor millia; quinta 6 valet sex decades millium, seu 60000 sexaginta millia. sexta 3 denotat tres centurias millium, seu 300000 trecenta millia; septima 4 significat quatuor millia millium, seu 4000000 quatuor Milliones; Octava 2 facit 20000000 viginti milliones; Nona 5 tandem significat 500000000 seu quingentas Milliones.

5 243 64895

	•	Quinque.
90		Nonaginta.
800		Octingenta.
4000		Quatuor millia.
60000		Sexaginta millia.
300000		Trecenta millia.
4000000		Quatuor millia millium : seu quatuor milli-
20000000		Viginti milliones. (ones.
500000000		Quingentæ milliones.

Ubi fructum haud contemnendum affert sequens Tabula,

Locus	Valor.
Primus	Unitates
Secundus	Decades
Tertius	Centuriæ.
Quartus	Millia.
Quintus	Decades millium
Sextus	Centuriæ millium.

Pars I. Caput II.

Septimus	Milliones
Octavus	Decades millionum.
Nonus	Centuriæ millionum.
Decimus	Millia millionum.
Undecimus	Decades millium millionum.
Duodecimus	Centuriæ millium millionum.
13us	Milliones millionum.
14us	Decades millionum millionum.
15us	Centuriæ millionum millionum.
16us	Millia millionum millionum.
17us	Decades millium millionum millionum.
18us	Centuriæ millium millionum millionum.
19us	Milliones millionum millionum.
20us	Decades millionum millionum millionum.
21us	Centuriæ millionum million. millionum.
22us	Millia millionum millionum millionum.
23us	Decades millium million. million. million.
24us	Centuriæ mill. millionum million. million.
25	Milliones millionum millionum million.

Notandum ad hanc Tabulam singulos tres locos se immediate sequentes constituere membrum separatum Tabulæ, cui libet imponere nomen desumptum à valore primi loci cujuscunque membri.

Sic membrum primum dicatur *Membrum unitatum*, quia primus illius locus valet unitates.

Mem=

De Numeror. Ordine & Enuntiatine. 9

Membrum secundum vocetur [Membrum millium quia primus ejus locus (in ordine quartus) significat millia.

Membrum tertium sit millionum.

Quartum millium millionum.

Quintum millionum millionum. & sic porro.

Obiter autem hic notandum membra hujus Tabulæ progredi in proportionem milleculpa.

Ex quibus præmissis nullo jam negotio eruitur Methodus enuntiandi quemlibet numerum propositum, cujus hæ sint partes.

I. Procedendo à dextera versus sinistram numerus propositus post singulas tres notas lineolis secetur in quot potest, membra, quæ singula contineant tres notas, excepto ultimo, quod poterit etiam constare duabus aut una.

II. Membro primo à dextera subscribe unitatem seu 1

III. Membro secundo subscribe literam minusculam m, quæ significabit millia.

IV. Tertio membro subscribe literam Majusculam M, quæ denotabit Milliones.

V. Quarto membro subscribe utramque literam dictam sc. tam minusculam m, quam Majusculam M. ita tamen ut minuscula præcedat, hoc modo mM, quæ scriptio significabit millia Millionum.

VI. Membro quinto suppone duas Majusculas MM, (mutata sc. præcedentis membri minuscula in majusculam) quæ designatio significat Milliones Millionum.

Quibus MM si præmittatur minuscula m, habebitur denominatio membri sexti mMM, hoc est, millia millionum millionum.

Et si hujus denominationis litera minuscula *m* mutetur in Majusculam *M*, habebitur *MMM*. hoc est *milliones millionum millionum* pro membro septimo.

Cui si iterum præmittatur minuscula *m*, acquiretur nomen membri octavi *mMMM*, hoc est, *millia millionum millionum millionum*.

Quod si porro litera minuscula *m* mutetur in majusculam *M*, habebitur designatio membri noni *MMMM* hoc *milliones millionum millionum millionum*.

Et sic deinceps membro ubi non est minuscula *m*, illam præponendo acquirimus nomen membri sequentis.

Ubi vero adest, illam mutando in majusculam *M*, iterum habetur denominatio membri sequentis.

VII. Postquam jam singulis membris propriæ subscriptæ sunt denominationes, numeri cujusque membri enuntiandi sunt ac si essent soli (nulla habita ratione nec antecedentium nec consequentium, & subsistendo semper in centuriis, quia tantum sunt tres loci) & tum subjungenda erit denominatio subiecto membro propria.

Quæ omnia cum in Exemplo evadant clariora, unum aut alterum asserre non pigebit.

Exemplum I.

Sit. Numerus propositus, qui in tria membra divisus

$$\begin{array}{r|l|l} 135 & 798 & 462 \\ M & m & i \end{array}$$

cum denominationibus suis appositis sic stabit, & juxta singula membra sic enuntiari debet, incipiendo contra ordinem antea notatum à sinistra versus dexteram.

Cen-

De Numeror. Ordine & Enumtiatione. 11
 Centum triginta quinque Milliones.
 Septingenta nonaginta octo millia.
 Quadringenta sexaginta duo.

Exemplum II.

14	234	567	891	234	567	898	374	567
MM	mM	MMM	mMM	MM	mM	M	m	i
MM	MM							

Quem numerum juxta præcedentia sic efferre oportet.
 Quatuordecim Milliones Millionum Millionum Millio-
 num.
 Ducenta Triginta quatuor millia Millionum Millionum
 Millionum.
 Quingentæ sexaginta septem Milliones Millionum Mil-
 lionum.
 Octingenta nonaginta & unum millia Millionum Millio-
 num.
 Ducentæ triginta quatuor Milliones Millionum.
 Quingenta sexaginta septem millia Millionum.
 Octingentæ nonaginta octo Milliones.
 Trecenta septuaginta quatuor millia.
 Quingenta sexaginta septem.

C A P U T I I I.

De Additione Integrorum.

Additio est plurium Numerorum in unam Summam
 collectio, seu Inquisitio Numeri unius, qui quotlibet
numeris datis sit æqualis.

Nu-

De Additione Integrorum. 13

Cujus tabellæ hic est usus. Sint addendi numeri 8 & 7. Sumo 8 in linea transversa AB & 7 in linea descendente AC. Tum ab 8 uno digito descendendo versus inferiora & à 7 in linea transversa procedo. donec perveniam ad cellulam ubi duæ illæ lineæ se invicem intersecant: illam autem intersectionem videmus fieri in cellula 15, adeoque dicimus numeros 8 & 7 simul additos facere summam 15.

Et sic de reliquis.

Numerorum compositorum Additio majoris est difficultatis, quam tamen simplicium Additio probe cognita penitus discutiet, cum illa ab hac dependeat.

Ut jam illa Additio commodius fiat, numeri addendi ita scribi debent, ut notæ homogeneæ seu ejusdem uaturæ & loci sibi invicem sint subscripti, scilicet Unitates unitatibus; decades decadibus; centuriæ centuriis; millia millibus & sic porro.

Tum ducenda lineola sub Numeris datis, & summa Unitatum subscribenda columnæ Unitatum; Decadum columnæ Decadum; Summa Centuriarum Columnæ Centuriarum; Summa Millium columnæ millium; & sic deinceps quandiu columnæ exstiterint.

Exemplum.

3	5	7	2	1	Columna Unitatum constat numeris
1	2	0	4	3	2. 3. 1. qui cum simul faciunt 6,
5	1	2	3	2	istam 6 infra lineolam eidem columnæ
<hr/>					subscribo.
9	8	9	9	6	

Deinde Columna Decadum habet numeros 3. 4. 2, quorum summa 9 sub lineola decadibus subscribatur.

Tum

Tum columna centuriarum continet 2. o. 7. quorum summam 9. centuriis subscribere oportet.

Ut &c columnæ Millium 1. 2. 5. summam 8. ipsis Millibus.

Et denique columnæ Decadum Millium 5. 1. 3. Summam 9, eidem columnæ subscribere oportet.

Quo facto dicimus Numerum sub lineola scriptum esse Summam trium Numerorum datorum.

Id quod tam clare patet, ut demonstrationem superfluum ducamus; cum enim singuli loci subscripti Numeri sint æquales summis singulorum locorum in numeris datis. facile patet, omnium simul locorum Numeri subscripti summam esse æqualem summis omnium simul locorum in numeris datis, hoc est ipsum numerum subscriptum esse æqualem ipsis numeris datis simul sumtis.

Nota Generalis.

In Additione, Subtractione & Multiplicatione operatio procedit à dextera versus sinistram. In divisione vero è contra à sinistra versus dexteram.

Quod si vero contingat, summam alicujus columnæ majorem esse quam ut unica figura scribi possit, tum illa quæ est ad dexteram subscribenda est columnæ in qua versamur, & reliqua columnæ sequenti in ordine erit adnumeranda. Quod sequens exemplum declarabit.

Exemplum.

6	5	7	9	Columna Unitatum facit 18, figuram 8
2	3	4	5	quæ unitates denotat subscribo Columnæ
4	6	8	3	Unitatum, & 1 quæ decadem significat se-
5	4	6	1	quenti Columnæ decadem adjicio.
<hr/>				
1	9	0	6	8

Ita-

De Additione Integrorum.

15

Itaque quia servata illa una decas seu 1 cum secunda columna decadum facit 26, figuram 6 subscribo columnæ decadum, & alteram 2, quæ decades decadum seu centurias significat, sequenti columnæ centuriarum addo.

Cum autem servata illa Centuriarum figura 2, cum centuriarum columna faciat 20 centurias, figuram 0 subscribo columnæ Centuriarum, & alteram 2 decades Centuriarum seu millia significantem, columnæ millium adjicio

Quoniam porro servata illa millium figura 2 cum columna millium faciat 19, figuram 9 subscribo columnæ millium, & reliquam 1 decades millium denotantem, quia nullæ columnæ ulterius dantur addendæ, post notam 9 infra lineolam adscribo.

Et inventa erit summa Numerorum datorum quæsitæ.

Quæ methodus si in omnibus Exemplis observetur, nulla in Additione talium numerorum relinquetur difficultas.

Additio diversarum specierum.

Quia in commercio humano & præcipue in mercatura sæpissime evenit, ut numeri non ita absolute seu in unica tantum specie considerentur, sed cum relatione ad varias pecuniæ, ponderis, mensuræ species; operæ pretium erit haud exiguum, si penitus inspiciamus, quomodo Additio circa illas sit instituenda.

Ut autem illa rite peragatur, similes species sub se invicem scribantur, & tunc addenda est columna minimæ speciei, cujus summa si sit minor unitate speciei proxime majoris, illa columnæ minimæ speciei subscribatur; si vero

vero major una aut pluribus unitatibus speciei proxime majoris, tum excessus hujus summæ supra istam vel istas unitates subscribe columnæ minimæ speciei; & unitates adnumera columnæ speciei proxime sequentis, in cujus additione eodem modo procedendum est; ut & in tertia, quarta & sic porro.

Quæ omnia exemplis fient clariora, quorum duo afferemus, petita a pecuniæ speciebus in hisce regionibus usitatissimis; Primum versabitur circa florenos, stuferos, denarios, continente uno floreno viginti stuferos, uno autem stufero sedecim denarios;

Secundum spectabit Libras, Solidos & Semistuferos, quos ad imitationem nominis belgici Grotas vocare liceat, comprehendente una libra 20 Solidos, & uno Soludo duodecim Grotas.

Exemplum I.

Flor.	Stuf.	Denarii	Columna Denariorum facit 26,
128	12	14	quæ Summa cum unitatem sequentis speciei sc: unum stuferum, id est 16 denarios, excedat 10 denariis, istum excessum
234	16	12	
363	9	10	10 subscribo columnæ denariorum, & istum 1 stuferum annumero columnæ stuferorum.

Hæc cum isto uno stufero servato facit 29 stuferos; quæ summa cum unitatem speciei sequentis, sc: unum florenum seu 20 stuferos superet 9 stuferis, istum excessum 9 subscribo columnæ stuferorum, & 1 florenum addo columnæ Florenorum.

Quæ cum uno isto floreno facit 363. quam summam idcirco subscribo, quia nulla alia superest columna.

Uc

De Additione Integrorum. 17

Ut autem facilius evadat harum specierum Additio sequentem damus Tabulam.

Denarii -----	Stuferi		Stuferi -----	Floreni.
16 -----	1		20 -----	1
32 -----	2		40 -----	2
48 -----	3	Deinde	60 -----	3
64 -----	4		80 -----	4
80 -----	5		100 -----	5

Exemplum II.

Librae	Solidi	Grotæ.	Columna
576	15	8	Grotarum facit 19,
698	14	11	quæ summa 12 grotas hoc
1275	10	7	est unum solidum superat 7
			grotis; quare columnæ Gro-
			tarum istum excessum 7 sub-
			scribo, & 1 solidum addo columnæ sequenti Solidorum.

Haec cum 1 isto solido facit 30 solidos, qui rursus 20 solidos hoc est unam Libram superat 10 solidis, quem excessum 10 pono sub columna Solidorum, & 1 Libram addo ad Columnam Librarum.

Quae cum ista 1 Libra facit 1275, quam Summam sub eadem Columna Librarum pono, quia illa est ultima, & nihil amplius addendum restat.

Majorem facilitatem huic Additioni conciliabit procul omni dubio sequens Tabella.

Grotae	Solidi	Solidi	Librae
12 -----	1	20 -----	1
24 -----	2	40 -----	2
36 -----	3	60 -----	3
48 -----	Sunt 4	80 -----	4
60 -----	5	100 -----	5
72 -----	6	120 -----	6
84 -----	7	140 -----	7
	&c.	B	Haud

Haud dissimili modo procedendum est in Additione diversarum Specierum Ponderum, Mensurarum Motuum &c.

C A P. I V.

De Subtractione Integrorum.

Hæc operatio Additionem immediate excipit eique contraria est: quemadmodum enim Additio numeros numeris addit: ita Subtractio numerum numero demit; adeoque id quod Additio componit è contra à Subtractione resolvitur.

Est igitur Subtrahere, numerum minorem à majori auferre & Residuum exhibere.

Sicut in Additione ita & hic in Subtractione numeri considerantur vel simplices vel compositi.

Simplicium subtractionem ipsa natura & quotidianus usus in rebus minimi momenti facile nos docent, & ejus ignarum aliàs apposita laud parum instruet eadem quam Additioni admisculum dedimus Tabella: quam videre & Subtractionem ex ea hoc modo exercere licet.

Oporteat subtrahere numerum minorem 7 à majori 15.

In linea descendente A C sumatur numerus 7, inque ejus transversa FG numerus 15, à quo si in linea ascendente E D progrediamur ad summum, inveniemus numerum 8, qui propterea erit residuus. Et sic de reliquis simplicibus.

Ut jam Subtractio Numerorum compositorum rite peragatur; iterum, ut supra in Additione, notæ homogeneæ & similes sibi invicem subscribantur, ita tamen ut

du-

De Subtractione Integrorum. 19

numerus major seu à quo debet fieri subtractio superiorem, minor vero seu qui debet subtrahi inferiorem occupet locum.

Sic si à majori 6 7 4 5 8 auferri debeat minor à 3 1 4 6; illi hoc modo scribendi sunt;

Tum incipiendo à dextera, 6 unitates auferantur ab 8 unitatibus & 2 residuum 2 subscribatur columnæ unitatum.

6	7	4	5	8	6	7	4	5	8
					2	3	1	4	6
					<hr/>				
					4	4	3	1	2

Deinde 4 decades à 5 decadibus ablatae relinquunt 1 decadem, columnæ decadum supponendam.

Ut & 1 Centuria à 4 centuriis subtracta reliquit 3 centurias, columnæ centuriarum subscribendas.

Haud secus si 3 Millia demantur à 7 millibus, relinquuntur 4 millia sub millibus ponenda.

Et denique si 2 Decades Millium auferantur à 6 decadibus Millium, remanebunt 4 decades Millium quas scribantur infra Decades Millium.

Et tum dicimus Numerum lineolæ subscriptum esse residuum quæsitum, qui ex proposita subtractione resultare debeat; uti operationem per partes consideranti facile patet.

Ex quibus videre licet nullam huic Subtractioni inesse difficultatem. quando omnes notæ Numeri minoris seu subtrahendi sunt minores omnibus notis numeri majoris seu à quo debet fieri subtractio; cum illa revera nihil aliud sit quam Subtractio numerorum simplicium toties repetita, quot notæ in Subtrahendo inveniuntur.

Major autem est difficultas, quando inferioris numeri quædam notæ majores sunt notis numeri superioris, ut ex appposito manifestum fiet exemplo, cujus solutio majorem

rem dabit lucem quam regulæ quæ hic vulgo præscribuntur.

Oporteat subtrahere 45 a 83. Illis sibi invicem sub-
 7 scriptis, liquet 5 unitates non posse subtrahi a 3
 83 unitatibus, majorem sc. à minori; ut autem illud
 45 fieri possit à nota sequente superiori 8. quæ valet
 8 Decades, mutuo sumo 1 decadem, id est 10 uni-
 38 tates, quæ cum 3 unitatibus faciunt 13 unitates, à
 quibus si jam demantur 5 unitates, remanent 8 unitates,
 sub linea unitatibus subscribendæ.

Deinde quia ab 8 Decadibus una decas mutuo accepta
 fuit, loco 8 ponendæ sunt 7 decades, à quibus si tum sub-
 trahantur 4 decades, remanebunt 3 decades infra lineam
 decadibus subscribendæ, ut obtineatur residuum quæsi-
 tum 38.

Similiter si a 60102 debeat subtrahi 12345, quia
 5 9 0 9 5 a 2 non potest subtrahi, à sequente cy-
 0 0 1 0 2 fra seu Nulla 0 mutuo sumerem 1 deca-
 1 2 3 4 5 dem, sed cum illa nihil possit mutuo da-
 4 7 7 6 7 re transeo ad loci tertii centuriarum no-
 tam 1, (quæ significat unam centuriam
 seu decem decades) & ab illa mutuo sumo 1 decadem seu
 10 unitates, quæ cum 2 unitatibus faciunt 12 unitates; à
 quibus si demantur 5 unitates, remanebunt 7 unitates infra
 lineam sub unitatibus ponendæ.

Quia jam à loco tertio centuriarum 1, seu 10 decadi-
 bus 1 decas mutuo sumpta est, liquet tantum manere 9 de-
 cades, ac proinde Nullam loci decadum mutari debere in
 9 & 1 loci tertii in Nullam.

Qua mutatione sive reipsa facta sive subintellecta sub-
 traho 4 decades à 9 decadibus, & remanentes 5 decades
 infra lineam decadibus subscribo.

Tum

De Subtractione Integrorum. 21

Tum centuriarum notam 3, subtrahere oportet à Cyfra seu Nulla supraposita, quod cum fieri non possit, a sequente Nulla quarti loci qui significat Millia, unum mille, seu 10 centurias sumerem mutuo; sed quia nec hoc est possibile transeo ad sequentem notam 6, quæ significat 6 decades millium, seu 60 decades centuriarum; a quibus mutuo sumo 1 decadem centuriarum, seu 10 centurias, quæ cum Nulla facit 10 centurias, & ab illis 10 subtraho 3 Centurias, ut remaneant 7 Centuriæ, quas pono infra lineam.

Deinde quia a 60 decadibus centuriarum 1 decas est mutuo sumta, remanent tantum 59, quare Nulla quarti loci mutando in 9 & 6 quinti in 5.

Quæ factò 2 millia subtraho a 9 millibus, & remanent 7 millia, collocanda sub millibus.

Deinde 1 decadem millium demo a 5 decadibus millium & residuum 4 decades millium pono infra lineam sub decadibus Millium.

Et dico Numerum infra lineam scriptum imperatæ subtractionis esse legitimum residuum.

Atque hæc est subtractionis Formula apud plurimos Arithmeticos hucusque usitata, una cum sua demonstratione, qua jam patet, quare toties 1 in 0 & 0 in 9 mutantur.

Quia autem illa mutatio si scribatur confundit, si non scribatur, sæpe memoria excidit, ideoque facile hac methodo in errorem incidimus, præstabit modo sequenti subtractionem exercere.

Resumamus duo Exempla ante allata, non necessitatis sed comparisonis ergo, ut scilicet pateat quænam operandi formula sit expeditior. Erat autem exemplum primum.

83	A	7	8	B	Quia 5 unitates a 3 subtrahi non possunt a sequenti loco Decadum mutuo sumo 1 Decadem ut fiat 13 unitates, a quibus demtis 5 unitatibus remanent 8 unitates.
45		4	5		
<hr/> 38		<hr/> 3	<hr/> 3		

Jam porro licet a loco Decadum 1 decas sit mutuo accepta, secundam notam superiorem 8 unitate non minuo, sed inferiorem 4 unitate augeo, quod fit ipsi apponendo punctum, & tum aufero 5 ab 8, ut remaneat 3, idem sc; residuum quod acquiritur auferendo 4 a 7, ut patet in A & B,

Sequitur jam exemplum secundum, ubi 5 a 2
 6 0 1 0 2 non potest subtrahi, mutuo sumo
 1. 2. 3. 4. 5 a loco secundo 1, qui valet 10, &
 punctum appono proximæ notæ inferiori 4.

Jam 10 mutuo sumpta & 2 unitates faciunt 12 unitates, a quibus demtis 5 remanent 7.

Deinde non 4 sed 5 (quia illud punctum valet unitatem) subtraho a 0, quod quia non potest a 10 & notæ sequenti inferiori 3 appono iterum punctum; itaque 5 a 10 subtractæ relinquunt 5.

Tum non 3 sed 4 (propter punctum) demo ab 1, seu quia id impossibile, ab 11 & notæ sequenti inferiori 2 adjungo punctum: Et 4 ab 11 reliquum facit 7.

Similiter non 2 sed 3 (propter idem punctum) demo a 0, quod non potest, ideo a 10 & sequenti 1 appono punctum, jam 3 a 10 demto remanet 7.

Tandem non 1 sed 2 a 6 remanebit 4.

Et obtinebitur idem cum præcedenti residuum, sed majori cum facilitate & nulla confusione, ut cuilibet hanc me-

De Subtractione Integrorum. 23

methodum cum præcedente comparanti fiet manifestum.

Sunt vero & alii, qui secundam hanc methodum aliquo modo mutant servata tamen punctorum additione ad notas Numeri subtrahendi.

Illorum operandi formula talis est. In hoc Exemplo

6	4	3	2	6 a 2 non potest : apposito
2.	4.	7.	6	puncto ad 7. 6 a 10. ma-
				net 4. qui cum 2 facit resi-
3	9	5	6	duum 6.

Diversitas operationis in eo consistit, quod cum supra auferatur 6 a 10 cum 2 hoc est 6 a 12, hic prius subtrahitur 6 a 10, & residuo 4 addatur 2, ut totum remanens fiat 6, quod idem erit si 6 auferatur a 12.

Deinde 8 a 3 non potest; ergo 8 a 10 (cum puncto ad 4) manet 2, qui cum 3 facit residuum 5.

Tum 5 a 4 non potest: 5 a 10 (cum puncto ad 2) manet 5, qui cum 4 facit 9.

Denique 3 a 6 manet 3.

Et hæc subtrahendi methodus est illa qua utimur in Subtractione diversarum Specierum, quæ nunc sequitur.

Subtractio Diversarum Specierum.

EXEMPLUM I.

Ubi omnes species inferiores minores sunt omnibus superioribus.

Flor.	Stuf.	Denarii	
245	18	10	Subtraho 4 Den. a 10, & resi-
123	8	4	duum 4 pono sub denariis.
			Tum 8 stuf. ab 18, & rema-
122	10	6	nent 10, infra stuferos scribendi,
			B 4
			Dein-

Deinde floreni 123 a 145 subtracti juxta superiora relinquant 122, qui sub florenis notentur & habebitur residuum quæsitum.

E X E M P L U M II.

Ubi quædam species inferiores suis superioribus majores sunt

Flor.	Stuf.	Denarii	Quia 10 denarii a 9 non possunt subtrahi à specie proxima stuferorum mutuo summo unitatem, seu 1 stuferum qui valet 16 denarios, & inferiori
638	12	9	
245.	16.	10	
392	15	15	16 appono punctum; tum 10 a 16 manent 6, qui cum 9 superiori nota denariorum faciunt residuum subscribendum 15.

Deinde 17 a 12 non potest; ergo iterum (puncto adscripto speciei sequenti inferiori) mutuo summo unitatem proximæ speciei, quæ valet 20 stuferos: itaque 17 a 20, manet 3 qui cum 12 faciunt residuum 15.

Tum 6 ab 8 manent 2: 4 a 13 manent 9: & 3 a 6 manent 3.

E X E M P L U M III.

Libræ	Solidi	Grotæ	Cum 5 grotæ a 4 demi nequeant, assumo 1 proximæ speciei, quæ valet 12 & appono punctum.
567	8	4	
275.	12.	5	
291	15	11	Itaque 5 a 13 manent 7

qui cum 4 faciunt residuum 11.

Deinde 13 ab 6 non potest: itaque scripto puncto ad

De Addit. & Subtract. Probatione. 25

275 mutuo sumo 1 Libram, hoc est, 20 Solidos: jam 13 a 20 manent 7, qui cum 8 facient residuum ponendum 15.

Denique 6 a 7 manet 1: 7 a 16 manet 9: 3 a 5 manet 2. & sic habebitur Residuum quæsitum.

Sed hæc de Additione & Subtractione dicta sufficient; sequitur

C A P U T V.

*De Additionis & Subtractionis
Probatione.*

CUM nullibi major requiratur attentio quam in iis rebus, quæ per calculum Arithmeticum expediuntur, præsertim si sit paulo prolixior & altius ascendat, attentio autem ne quidem in exercitationibus, adeoque multo minus in tyronibus quos jam docere volumus, sit semper eadem, non possumus quin etiam dicamus aliquid de modo quo possint esse certi utrum recte sint operati, an secus, utrum error in calculum irrepperit, an vero non.

Probatio Additionis I.

Prima in ordine procedat probatio Novenaria, ut vulgo dicitur, quia fit per abjectionem Numeri 9, ex numeris additis, & notatur Residuum; quando similiter ex summa inventa abjiciuntur omnes novenarii, & residuum est idem asseritur operationem nullo laborare vitio, & justam inventam esse summam.

Illa autem in apposito Exemplo instituitur hoc modo,

$$\begin{array}{r} 2\ 3\ 4 \\ 5\ 6\ 7 \\ 3\ 4\ 5\ 6 \\ 4\ 5\ 6\ 6 \\ 1\ 2\ 3 \\ \hline 1\ 7\ 2\ 5 \end{array}$$
 Omnes Numeri daduntur ac si merae essent unitates, nulla habita ratione loci quem occupant, & novarii abjiciuntur notaturque residuum, sit 2 & 3 sunt 5 & 4 sunt 9, ergo supra 9 nihil. Deinde 5 & 6 sunt 11, supra 9 sunt 2. 2 & 7 sunt 9, supra 9 nihil. Tum 3 & 4 sunt 7 & 5, sunt 12. supra 9 sunt 3. 3 & 4 & 5 sunt 12 supra 9 sunt 3. 3 & 6 sunt 9, supra 9 nihil. 1 & 2 & 3 faciunt 6, qui 6 est supra 6. quare illum numerum 6 a latere pono supra lineam.

Deinde eodem modo ex summa inventa rejicio omnes novenarios; ut 1 & 7 & 2 sunt 10, supra 9 est 1: 1 & 5 sunt 6, qui 6 iterum est supra 9, ideoque illum pono infra lineam. cum jam utrobique sit residuum 6 dicunt operationem rite peractam, summamque obtineri veram.

Secus autem judicabit is, qui considerat modum probandi operationem aliquam debere esse semper certam & stabilem, nulla ratione posse labefactari, ut in illo certam possimus ponere fiduciam;

Hanc autem probationem talem non esse ex sequentibus patebit.

$$\begin{array}{r} 6\ 7\ 2 \\ 5\ 2\ 2 \\ \hline 1\ 8\ 2 \end{array}$$
 Sint duo apposti numeri addendi, quorum summam falsam ponimus, quæ tamen juxta probationem novenariam erit vera, nam utrobique residuus est idem numerus 2, adeoque illa probatio falsitatem & errorem non detegit, & per consequens fallax est: nec mirum est illud, cum hac ratione non rejiciantur 9 quoties fieri potest, sed tantum per mirabilem proprietatem numeri 9 (de qua inferius) inquiritur residuum, quod remaneret, si omnes 9 abjicerentur.

Quod

De Addit. & Subtract. Probatione. 27

Quod si in proposito Exemplo rejiciantur 9 quoties fieri potest, statim patebit falsitas summæ; sæpius enim rejicientur 9 ex summa quam ex numeris additis. In summa enim 182 continentur 9 vigesies & superest 2, quia vigesies 9 sunt 180.

At vero 67 continet 9 septies & restat 4. Et 52 continet 9 quinquies & restat 7. Deinde in duobus restantibus 4 & 7 hoc est 11. continetur 9 semel & restat 2: Adeoque ex numeris additis 9 abjiciuntur tantum tredecies, cum ex summa fuerint abjecti vigesies. Unde mirum non est summam esse falsam, licet utrobique remaneant 2; secus autem ex vera summa 119 etiam tredecies rejicitur 9 cum eodem residuo 2.

Quæ probationis forma perfectam exhibet divisionem & tum non tantum 9, sed etiam quilibet alius usu venire potest numerus.

Præterea suspectam reddit istam probationem novenariam facilis mutatio quæ potest fieri in summa collecta, quæ prius fuit vera, postea fit falsa, & à probatione non detegitur.

A	5 6 7	B	5 6 7	C	5 6 7	Sic in A inventa est vera summa, & etiam post ab- jectionem 9 u- trobique nihil superest.
	3 4 2.		3 4 2		3 4 2	
	<hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>		<hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>		<hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>	
	9 0 9		9 0 9 0		9 0 0	

Si iam vero veræ summæ adjungatur Nulla 0, ut in C juxta probationem summa erit vera, quæ tamen ipsa vera summa decuplo-major est.

Vel si 9 mutetur in 0, quod facile fieri potest, summa erit falsa in se, & tamen bona juxta probationem.

Quæ

Quæ fallacia cum in majoribus summis adhuc sit multo major, patet isti probationi non fidendum esse nimis, ad obtinendam certitudinem Additionis; licet enim cum errorem detegat, summa procul omni dubio est falsa; quando vero nullum detegit non semper certum est inventam esse summam veram; uti allata exempla satis ostendunt.

Nec tamen illam omnino rejiciendam esse putamus, tum quia exiguo labore instituitur & errorem (licet non semper) tamen sæpissime detegit, imo rarissime fallit, nisi quis data opera falsos numeros interponat vel numeros mutet, cujus malitiæ suspicionem in virum bonum cadere non oportet.

Cæterum Probationis novenariæ fundamentum situm est in mirabili proprietate numeri 9, ex proportionem decupla resultante; juxta quam omnes numeri secundum valorem locorum considerati abjectis omnibus 9 reliquum faciunt idem, quod relinquitur, si iidem nulla locorum habita ratione, seu tanquam meræ Unitates considerentur, & ex illorum summa auferantur omnes 9.

Sic numerus 186, in A, idem est qui tres numeri in B,

I 8 6. A ubi juxta locos consideratur.

seu Numerus 100 continet 9 undecies &

I 0 9 B. remanet 1.

8 0 Numerus 80 continet 9 octies, & re-

6. stabit 8.

Numerus 6 continet 9 ne quidem semel & restat 6.

Tres illi residui 1. 8. 6. simul faciunt 15, qui continet 9 semel & remanet 6. Quare numerus A juxta suos locos sumptus post abjectos omnes 9, relinquit 6. Qui idem 6 etiam remanet si spectentur ut meræ unitates: nam

De Addit. & Subtraſt. Probatione. 29

nam 1 & 8 & 6 faciunt 15, à quo abjecto 9 ſemel remanet 6 ut ante.

Probatio Additionis II.

Hæc fit per Subſtractionem Additioni contrariam; quicquid enim per Additionem componitur, illud Subſtractione iterum reſolvitur.

Illa autem à Summa inventa ſingulos numeros ſeorſim ſubtrahit, & ſi tandem poſt ultimam ſubſtractionem nihil remaneat, concludit Additionem eſſe rite peractam.

$$\begin{array}{r} 8\ 7\ 6\ A \\ 5\ 4\ 3\ B \\ 2\ 1\ 9\ C \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 8\ 7\ 6\ A \\ 5\ 4\ 3\ B \\ 2\ 1\ 9\ C \end{array}} \right\} \text{Numeri Addendi}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 6\ 3\ 8\ D \\ 8\ 7\ 6\ A \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 1\ 6\ 3\ 8\ D \\ 8\ 7\ 6\ A \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Summa Omnium} \\ \text{Subtrahendus I} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7\ 6\ 2\ E \\ 5\ 4\ 3\ B. \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 7\ 6\ 2\ E \\ 5\ 4\ 3\ B. \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Reſiduum.} \\ \text{Subtrahendus II.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 1\ 9\ C \\ 2\ 1\ 9\ C \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 2\ 1\ 9\ C \\ 2\ 1\ 9\ C \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Reſiduum.} \\ \text{Subtrahendus III.} \end{array}$$

$$0\ 0\ 0 \quad \text{Reſiduum.}$$

Trium Numerorum A. B. C. ſumma eſt D; à qua ſubtractio numero A, neceſſario remanet numerus E, qui æqualis erit ſummæ numerorum B & C, ſi tum ab E auferatur numerus B remanebit F, æqualis tertio & ultimo numero C, qui ſi à ſeipſo auferatur relinquetur 0.

Quæ probatio nititur iſto Effato naturaliter cognito, Totum eſt æquale omnibus ſuis partibus ſimul ſumtis.

Probatio Additionis III.

Hæc fit per Additionem & Subtractionem, scilicet additionem ordine contrario instituendo à sinistra versus dextram, & summam columnæ à summa columnæ subtrahendo; si tum enim nihil post ultimam subtractionem reliquum sit, certo concludere licet Additionem nullo laborare vicio.

2	3	4	5	A	Sic numerorum A. B. C. D.
1	6	3	7	B	summa est E.
5	4	2	3	C	Ad hoc probandum Additionem
7	6	8	9	D	incipio à columna ultima, & quidem descendendo;
<hr/>					tum 2. 1. 5. 7 simul faciunt
1	7	8	9	E	15, quem numerum subtraho
1	7	8	9		

a 17, remanent 2 ponenda infra 7.

Columna tertia 3. 6. 4. 6. facit 19 quos aufero a 20, & remanet 1 ponenda infra 0.

Columna secunda 4. 3. 2. 8 facit 17, quo subtracto a 19 relinquetur 2 scribenda infra 9.

Tandem columna prima 5. 7. 3. 9. facit 24; qui si auferatur a 24 remanet 0; adeoque constat Summam esse bonam.

Hæc enim probatio nihil aliud est quam eorundem numerorum iterata Additio, & quidem inverso ordine, ne si prius sit erratum, secunda vice in eundem incidere-mus errorem. Deinde si eandem cum prima acquiramus summam non mirum est post subtractionem nihil remanere.

Probatio Subtractionis I.

Per abjectionem numeri 9. A numero superiori à quo facta est Subtractio abjice 9. quoties fieri potest, ut in
Addi-

De Addit. & Subtractione. Probatione. 31

Additione & residuum pone supra lineolam. Deinde ex numero subtracto & residuo simul iterum abjice omnes 9, quo facto si idem numerus remaneat cum priori, legitima & absque errore erit Subtractio.

8	3	4	5	A	Ab A subtracto B, remanet C,
3.	4.	5	2.	B.	quod sic probatur.
					In A. 8 & 3 sunt 11, supra 9 sunt
4	8	9	3	C.	2 : 2 & 4 & 5 faciunt 11, ite-
					rum supra 9 sunt 2.

Tum in B & C simul. 3 & 4 & 5 faciunt 12. supra 9 sunt 3: 3 & 2 & 4 faciunt 9, supra 9 erit 0. 8 & 9 faciunt 17, supra 9 sunt 8: 8 & 3 faciunt 11. supra 9 sunt 2.

Quare quia utrobique idem est residuum: juxta hanc probationis formulam subtractio erit bene instituta.

Sed quanta hujus probationis sit fides ex modo dictis satis patet.

Probatio Subtractionis II.

Per Subtractionem: Si à numero superiori, auferatur inventum Residuum, & remaneat numerus jam ante subtractus, certissimo est indicio Subtractionem vitio carere.

8	3	4	5	A	Ab A subtracto B remanet C, quod
3.	4.	5	2.	B	secunda Subtractione patet ubi ab A
					subtracto residuo C, iterum reperitur
4	8	9	3	C.	B. qui antea erat subtractus.
					Cum enim pateat A esse æqualem B
8	3	4	5	A.	& C, adeoque ab A ablato B, rema-
4.	8.	9	3.	C.	net C, & vicissim ab A sublato C re-
					manet B.
3	4	5	2.	B.	

Proba-

Probatio Subtractionis III.

Hæc fit per Additionem contrariam, & est commodissima. Si Nimirum Subtractus & Residuus in unam addantur summam, eaque sit æqualis numero superiori a quo subtractio facta est, Subtractio erit bona.

$$\begin{array}{r}
 8 \ 3 \ 4 \ 5 \ A \\
 3 \ 4 \ 5 \ 2 \ B \\
 \hline
 4 \ 8 \ 9 \ 3 \ C. \\
 \hline
 8 \ 3 \ 4 \ 5 \ A.
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{Adde.}$$

Quia Summa B & C est æqualis numero A, rite peracta est Subtractio: cujus ratio jam ex præcedenti manifesta est.

CAPUT VI.

De Multiplicatione Integrorum.

POST traditas Additionis, eique contrariæ Subtractionis operationes, sequuntur Multiplicatio & illi contraria Divisio, quarum illa nihil aliud est quam compendiosa Additio, & hæc contractam nobis exhibet Subtractionem.

Multiplicare, est invenire numerum qui numerum datum toties contineat quoties requiritur, seu quoties ille qui Multiplicator dicitur Unitatem continet; ita ut nomen istius multipli descendat a numero unitatum Multiplicatoris. Sic si multiplicator sit 2. propter duas unitates, Numerus inventus dicitur Duplus: A 3 fit triplus, A 4 quadruplus, Sic decuplus a 10. Centuplus a 100, &c.

Unde jam propius patet multiplicare numerum nihil aliud

De Multiplicatione Integrorum. 33

aliud esse quam datum numerum toties sibi ipsi addere, quoties unitas continetur in multiplicatore. Sic si 6 debeat multiplicari per 3, idem est ac si 6 ter sibi ipsi addatur, ut summa fiat 18, qui numerus itidem ex multiplicatione obtinetur.

Porro sicut Additio & Subtractio, ita etiam Multiplicatio est numerorum vel simplicium vel compositorum.

Ad multiplicandum duos per se invicem numeros simplices, notentur duo: sc. Regula Pigri, ut saepe dicitur & Tabella Multiplicationis.

Regula Pigri.

Illa sic habet.

- I. Duo numeri per se invicem multiplicandi sibi subscriptantur.
- II. Utriusque differentia a 10, ad cuiusque latus ponatur.
- III. Differentias per se invicem multiplica, & productum si una constet nota, scribe sub differentiis: si duabus, unam sub differentiis, alteram sub numeris multiplicandis.
- IV. Unius numeri dati differentiam ab altero numero dato subtrahere, & illa differentia aut sola aut cum secunda nota prioris producti addita dabit secundam notam producti quaesiti. Sed rem clariorem faciet sequens

E X E M P L U M I.

$$\begin{array}{r}
 9 \\
 8 \\
 \hline
 7
 \end{array}$$

Sit multiplicandum 9 per 8: quibus sibi invicem subscriptis, differentiam 9 a 10, quæ est 1 ipsi pono a latere: ut & 8 a 10, seu 2

C

juxta

juxta 8. Tum differentiarum per se invicem multiplicatas faciunt 2 ponendum infra differentias: quæ erit prima nota producti quaesiti: deinde subtraham vel 1 a 8, vel 2 ab 9, & differentiam 7 pono sub numeris datis, & erit productum quaesitum 72.

E X E M P L U M I I.

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r} 6 \quad 4 \\ 5 \quad 5 \\ \hline 2 \quad 0 \\ 1 \\ \hline 3 \end{array} & \begin{array}{r} 6 \quad 4 \\ 5 \quad 5 \\ \hline 3 \quad 0 \end{array}
 \end{array}$$

In hoc exemplo differentiarum 4 & 5 productum constat duabus notis 20, quorum una 0 posita est infra differentias, altera 2 infra numerus datos, cui addita differentia 4 a 5, vel 5 a 6, quæ est 1, fit 3 secunda litera producti quaesiti 30.

Vel poterit etiam litera secunda 2, memoriter illi differentia 1 addi, ut fiat eadem nota 3.

Et eadem erit ratio in reliquis, dummodo duo numeri propositi simul sint majores quam 10: cum alias illarum differentia 10 forent majores ipsis numeris propositis, & sic hi facilius multiplicarentur quam illi.

Demonstratio.

Cujus Regulae demonstrationem non Tyronibus sed provectioribus damus, quos jam notitia Multiplicationis Algebraicæ aliquo modo imbutos supponimus, cum hæc absque signis Algebraicis + & — vix possit proponi.

De Multiplicatione Integerorum. 35

9 ~~X~~ 1 Quia est 10 — 1 ∞ 9 Fiat multiplicatio.
8 ~~X~~ 2 Est 10 — 1 ∞ 8.

7 2

Erit 100 — 10 — 20 + 2 ∞ 9 multipl. per 8.

Cum autem sit 100 ∞ 80 + 20 hisce substitutis

Erit 80 + 20 — 10 — 20 + 2 ∞ 9 multipl. per 8.

Quia jam duo numeri 20 signis contrariis sunt notati, se invicem tollunt; ut fiat

80 — 10 + 2 ∞ 9 mult. per 9.

Hic autem 80 & 10 signis contrariis occurrunt notati, adeoque 10 ab 80 debet subtrahi, ut relinquatur 70, qui cum numero 2 facit productum quæsitum 72.

Id quod idem est ac si in appposito Exemplo differentia 1 a numero dato 8 subtrahatur, & residuum 7 cum 2 loco secundo à dextra versus sinistram conjungatur ut fiat 72.

Deinde

100 — 10 — 20 + 2 ∞ 9 multipl. per 8.

Cum autem sit 100 ∞ 90 + 10, illis substitutis

Erit 90 + 10 — 10 — 20 + 2 ∞ 9 multipl. per 8

Ubi quis duo numeri 10 contrariis signis sunt affecti. illis sublatis, erit

90 — 20 + 2 ∞ 9 multipl. per 8.

Hic iterum 90 & 20 contrariis signis notati, indicant debere subtrahi 20 a 90, ut reliquatur 70, qui cum numero 2 facit productum quæsitum 72.

Id quod idem est ac si in Exemplo differentia 2 a numero dato 9 subtrahatur, & residuum 7 cum 2 loco secundo

C 2 à dex-

Pars I. Caput VI.

ta versus sinistram (seu sub numeris datis positum)
gatur: quemadmodum præcipit Regula.

ne hæc est Regula Pigri, quæ suum usum habere
si non adsit Tabula multiplicationis, quam in du-
na proponimus: ne illam aliunde petere cogan-
ones.

F O R M A I.

$$2 \left| \begin{array}{r} 2-4 \\ 3-6 \\ 4-8 \\ 5-10 \\ 6-12 \\ 7-14 \\ 8-16 \\ 9-18 \end{array} \right|$$

$$3 \left| \begin{array}{r} 3-9 \\ 4-12 \\ 5-15 \\ 6-18 \\ 7-21 \\ 8-24 \\ 9-27 \end{array} \right|$$

$$4 \left| \begin{array}{r} 4-16 \\ 5-20 \\ 6-24 \\ 7-28 \\ 8-32 \\ 9-36 \end{array} \right|$$

$$5 \left| \begin{array}{r} 5-25 \\ 6-30 \\ 7-35 \\ 8-40 \\ 9-45 \end{array} \right|$$

$$6 \left| \begin{array}{r} 6-36 \\ 7-42 \\ 8-48 \\ 9-54 \end{array} \right|$$

$$7 \left| \begin{array}{r} 7-49 \\ 8-56 \\ 9-63 \end{array} \right|$$

$$8 \left| \begin{array}{r} 8-64 \\ 9-72 \end{array} \right|$$

$$9 \left| \begin{array}{r} 9-81 \end{array} \right|$$

FORMA

FORMA II.

*Tabula Pythagorica Multiplicationis
& Divisionis.*

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Cujus usus idem est, qui Tabulæ præcedentis Additioni propriæ & ab hac diversæ; cum exigua tantum differentia; quod ubi illic concursus linearum tradat summam, hic exhibeat productum duorum numerorum simplicium per se invicem multiplicatorum.

Verumenimvero monitos hic volumus Tyrones, melius esse facturos si illas Tabulas usu & exercitatione memoriæ firmiter imprimant, quam ut qualibet oblata multiplicandi occasione ad eas vel ad regulam modo allatam confugiant, cum illud operationi haud parvam injicere debeat moram.

Ad multiplicationem numerorum compositorum majori cum facilitate expediendam, sequentia notanda sunt.

I. Numerus major sumatur pro multiplicando, minor pro multiplicatore; magis commoditatis quam necessitatis gratia; cum istud alias indifferens sit.

II. Si multiplicator habeat tantum unam figuram, illa sub multiplicandi figura prima scribatur; si vero plures. reliquæ multiplicatoris notæ sub sequentibus Multiplicandi figuris.

III. Singulæ figuræ multiplicandi per quamlibet notam multiplicatoris multiplicentur, ut inde oriantur tot singularia producta quot sunt notæ in multiplicatore.

Ubi sedulo notandum, cujuslibet producti singularis primam figuram debere collocari, infra multiplicatoris figuram, qua tum utimur.

IV. Quæ producta singularia si tum in unam summam colligantur habebitur Productum Multiplicationis quæsitum.

Rem ipsam Exempla reddent magis manifestam.

EXEMPLUM I.

5 4 6 7 Multiplicandus.

4, Multiplicator.

2 1 8 6 8 Productum.

Cujus operatio sic procedit. Quater 7 facit 28. pono 8 sub 4 & 2 servo sequenti addendam: Quater 6 facit 24, cui si addas 2 servatam, venit 26: scribo 6 loco secundo post 8, & 2 servo, ut ante. Tum quater 4 facit 16 & cum 2 servata venit 18, pono 8 post 6; & 1 servo. Deni-

De Multiplicatione Integrorum. 39

Denique quater 3 facit 20, & cum 1 servata sit 21, quem totum pono, ut hic videtur eritque numerus infra lineam collocatus Productum quæsitum.

E X E M P L U M I I.

3 4 2 6 Multiplicandus

2 4. Multiplicator.

$$\begin{array}{r}
 13704 \\
 6852 \\
 \hline
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} 13704 \\ 6852 \end{array}} \right\} \text{Producta singularia, quorum}$$

8 2 2 2 4 Summa est Productum quæsitum.

Superior multiplicatus per 4 juxta præcedens Exemplum facit Productum singulare superius, cujus prima figura 4 ponitur sub multiplicante figura 4.

Deinde superior multiplicatus per 2 facit productum singulare inferius, cujus prima figura 2 ponitur sub multiplicante figura 2.

Quæ duo singularia producta si addantur in unam summam, illa constituet productum quæsitum.

E X E M P L U M III, exhibens duo compendia.

4 5 6 Multiplicandus

2 0 0 Multiplicator.

$$\begin{array}{r}
 000 \\
 000 \\
 912 \\
 \hline
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} 000 \\ 000 \end{array}} \right\} \text{Producta singularia, quorum}$$

9 1 2 0 0 Summa est productum quæsitum.

Superior multiplicatus per 0 facit 0 seu tria 0 productum singulare, cujus prima figura sub multiplicante 0.

C 4

Idem

Idem multiplicatus per multiplicatoris secundam 0, iterum facit tria 0 productum singulare, cujus prima figura sub multiplicante 0.

Idem adhuc multiplicatus per 2 facit tertium productum singulare, cujus prima figura sub multiplicante 2.

Quæ tria singularia producta in unam summam collecta dabunt productum.

N O T A.

Cum duæ 0 Multiplicatoris ubique faciant 0, commodius multiplicator ita potest multiplicando subscribi, ut prima figura significans 2 collocetur sub prima figura multiplicandi, & duæ 0 versus dextram emineant, hoc modo:

$$\begin{array}{r} 4\ 5\ 6 \\ 2\ 0\ 0 \\ \hline 9\ 1\ 2\ 0\ 0 \end{array}$$

quando sc: positæ duabus 0 sub linea la multiplicatio solummodo fit per 2, & obtinebitur idem productum cum præcedente.

Haud secus in apposito Exemplo, ubi uterque tam Multiplicandus quam Multiplicator 2 0 incipiunt; Omnes

$$\begin{array}{r} 3\ 2\ 0\ 0 \\ 2\ 0\ 0 \\ \hline 6\ 4\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{array}$$

figuræ 0 abscindantur, & multiplicetur 32 per 2, & producto 64 adjungantur quatuor 0 abscissæ, ut habeatur productum.

Nam juxta præcedens exemplum numeri sic starent; & idem acquireretur productum.

$$\begin{array}{r} 3\ 2\ 0\ 0 \\ 2\ 0\ 0 \\ \hline 6\ 4\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{array}$$

Hinc patet ad multiplicandum aliquem numerum per 10, ei absque multiplicatione tantum adjungi posse unam

De Multiplicatio Integrorum.

41

nam 0, cum 1 non multiplicet. Si per 100, duas 0,
si per 1000 tres 0. & sic porro.

$$\begin{array}{r} 25 \\ 10 \\ \hline 250 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ 100 \\ \hline 2500 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ 1000 \\ \hline 25000 \end{array}$$

EXEMPLUM IV. & ultimum, ubi
tertium compendium.

3 4 6	Multiplicandus	
2 0 4	Multiplicator.	
<hr/>		
1 3 8 4	}	Producta singularia, quorum
0 0 0		
6 9 2		
<hr/>		
7 0 5 8 4	Summa est Productum quaesitum.	

Superior multiplicatus per 4 facit productum singulare primum cujus prima figura sub multiplicante 4.

Idem multiplicatus per 0, facit secundum productum singulare tria 0, cujus prima figura est sub multiplicante 0.

Sicut idem multiplicatus per 2 facit tertium productum singulare, cujus prima figura ponitur sub multiplicante 2.

Tandem horum productorum singularium summa exhibet productum quaesitum.

NOTA.

Cum secundum productum singulare tribus constet 0, adeoque nihil significet, contrahemus operationem si in-

fra primum productum singulare sub o ponamus o, & tum multiplicationem continuemus per 2: sicut in appposito Exemplo.

$$\begin{array}{r}
 346 \\
 204 \\
 \hline
 1384 \\
 6920 \\
 \hline
 \end{array}$$

Haud secus in hoc Exemplo,

$$\begin{array}{r}
 70584 \\
 2468 \\
 1008 \\
 \hline
 7404 \\
 246800 \\
 \hline
 2475404
 \end{array}$$

Multiplicatio diversarum Specierum.

Hæc tantum inservit reductioni majorum specierum specierum ad minores, & peragitur multiplicando numerum majorum specierum per numerum, indicantem quoties minor species continetur in majori, adeoque nulla laborat difficultate, & ab illis qui præcedentia bene perceperunt, hæc multiplicatio absque ullo negotio in præxin deducetur; cujus exercitio subjacent hæc & similia Exempla.

E X E M P L U M I.

Queritur quot stufervas faciant Floreni 125?

1 2 5	Flor.
2 0	Stuf.
<hr/>	
2 5 0 0	Stuf. quæfiti.

Quia florenus unus facit 20 stufervos, numerum datum per 20 multiplica & habebis stufervorum quæsitum numerum.

E X E M P L U M I I.

Queritur quot denarios faciant 234 Ducati?

2 3 4	Ducati.
1 0 0	Stuferi.
<hr/>	
2 3 4 0 0	Stuferi.
1 6	Denarii.
<hr/>	
1 4 0 4 0 0	
2 3 4 0 0	
<hr/>	
3 7 4 4 0 0	Denarii quæfiti.

Primo quia ducatus unus facit 100 stufervos, numerum datum 234 multiplica per 100. ut veniant stufervi.

Deinde, quia unus stufervus continet 16 denarios, stufervi acquisiti multiplicentur per 16, ut veniant Denarii quæfiti.

Notandum quando major species reducenda ponitur ad minorem non proximam, sed uno aut duobus gradibus inde distantem, tum majorem ad istas proximas in ordine sequentes prius esse reducendam, ut tandem prodeat minor species quæsitæ: ut ex hoc Exemplo patet.

EXEM-

E X E M P L U M. III.

Queritur quot grotas faciant 368 Libræ.

3 6 8 Libræ.
2 0 Solidi.

Cum una Libra faciat 20 Solidos, numerum datum 368 multiplica per 20, & obtinebis numerum Solidorum.

7 3 6 0 Solidi.
1 2 Grotæ.

Tum Solidos multiplica per 12, quia unus Solidus facit 12 Grotas, & habebis grotas quæfitas.

1 4 7 2 0

7 3 6 0

8 8 3 2 0 Grotæ quæfitæ.

Notandum autem, si 20 solidi multiplicentur per 12 (quia unus solidus continet 12 denarios) & per inventum 240 (quot sc. grotæ continentur in una Libra) numerus propositus 368 multiplicetur, eundem omnino acquiri Grotarum numerum

3 6 8 Libræ

2 4 0 Grotæ

Et sic de cæteris.

1 4 7 2 0

7 3 6

8 8 3 2 0 Grotæ.

C A P U T V I I.

De Divisione Integrorum.

Multiplicationem immediatè excipit ei contraria Divisio quæ nihil aliud est quam compendiosa Subtractio.

Quip-

Quippe dividere est invenire Numerum, qui indicet quoties numerus datus in numero quovis dato contineatur, seu inquirere numerum qui doceat quoties numerus quivis datus a quovis dato numero possit subtrahi; id quod potest toties fieri quoties unitas continetur in numero per divisionem invento.

Numerus qui dividi debet dicitur Dividendus; qui dividit Divisor, & qui ex divisione resultat vocatur Quotiens, quia docet quoties Divisor in Dividendo contineatur.

Divisio iterum est vel numerorum simplicium vel compositorum.

Numerorum simplicium divisio vel ex memoria à teneris in minoribus numeris exercitata, vel ex Tabula Multiplicationis & Divisionis Cap. præcedenti exhibita deduci potest; cujus in Divisione idem est usus, qui Tabulæ Additionis & Subtractionis, in Subtractione, cum hac solummodo differentia, quod cum ibi inveniatur Residuum, hic inveniatur Quotiens.

Numerorum compositorum Divisio hisce præceptis absolvitur.

- 1 Notetur ordo, qui hic prioribus contrarius est, procedens sc. a sinistra versus dextram.
- 2 Divisoris notam primam colloca sub nota prima dividendi si sit minor; sub secunda vero si sit major.
- 3 Quære quoties prima divisoris nota, in supraposita nota vel notis comprehendatur, & quotientis primam notam scribe post lunulum à latere.
- 4 Totus divisor per hanc quotientis notam multiplicetur, & productum divisoni subscriptum à suprapositis dividendi notis subtrahatur; & residuum, si quod sit, supra dividendum ponatur.

Quo

Quo facto pro prima Quotientis nota peracta erit tota Divisionis Operatio.

5 Promoveatur idem divisor uno loco versus dextram, & repetantur 4 præcedentia præcepta, quando invenietur secunda quotientis nota, cum qua procedatur ut ante. idque repetatur donec omnes dividendi notæ evanuerint.

6 Si vero post divisionem aliquid remaneat (quod semper divisore debet esse minus) illud post quotientem separatim scribatur. eique divisor interjecta lineola subscriptur.

Quæ omnia ut fiant clariora unum & alterum Exemplum adjungere visum.

E X E M P L U M I.

$$\begin{array}{r} 2168 \\ 4 \overline{) 868} \end{array}$$
 Sit dividendum 868 per 4. Pono 4 sub 8, & quæro quoties 4 continetur in 8, quod fit bis, quare numerum 2 pono in quotiente post lunulam; & divisorem 4 multiplico per quotientis notam 2. & productum 8 pono sub 8, denique 8 de 8 ex 8, & remanet nihil.

$$\begin{array}{r} 2168 \\ 4 \overline{) 868} \end{array}$$
 Deinde divisorem promoveo uno loco versus dextram illiusque pono sub secunda dividendi notæ 6: quæro quoties 4 in 6: quod est semel & 1 pono in quotiente post 2: tum divisorem 4 multiplico per 1, & productum 4 pono sub 6 in eadem linea: denique subtrahō 4 a 6, & residuum 2 pono supra 6.

Tandem uno loco promotus divisor venit sub ultima nota

De Divisione Integerum

47

nota dividendi 8, & queratur quoties 4 non in 8, qui est supra 4, sed in 28, qui jam restat dividendus; id quod sit septies, & 7 pono tertio loco in quotiente. tum divisorem 4. multiplico per 7, & productum 28, ita scribe, ut nota 8 veniat sub 8, & 2 versus sinistram paulo inferius sub 2. Quod produ-

ctum 28 si à dividendi notis 28 subtrahatur, remanet nihil & peracta erit divisio.

Unde patet divisorem 4 in dividendo 868 ducenas decies septies contineri,

Eodem modo procedendum erit in omnibus Exemplis, ubi divisor unica tantum constat nota.

E X E M P L U M II.

$$\begin{array}{r}
 13 \\
 24 \overline{) 10944} \\
 \underline{24} \\
 124 \\
 \underline{124} \\
 0
 \end{array}$$

Sit dividendum 10944 per 24. Primam notam divisoris pono sub secunda dividendi, quia illa major prima. sc: 2 major quam 1:

Tum quoties 2 in 10, quod quidem sit 5; sed quia 24 multiplicatus per 5 facit 120, qui ab 109 subtrahi non potest; sumo 2 in 10 tantum quater, & 4 pono in quotiente: tum divisor 24 multiplicatus per 4 facit 96, ejus nota 6 scribatur inferius sub 9 & 9 sub 0. tum subtraho 96 ab 109 & manet 13, quod ponatur supra 9 & 1 supra 0.

Deinde

Pars I. Caput VII.

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 \times 34 \\
 \hline
 4 \\
 12 \\
 120 \\
 \hline
 124
 \end{array}
 \quad (45)$$

Deinde divisorem 24 uno loco promoveo, ut veniat 2, inferius sub 3 & 4 sub 4.

Tum quoties 2 in 13, quod quidem est sexies, sed quia 24 multiplicatus per 6 facit 144, qui à 134 auferti nequit; sumo 2 in 13 tantum quinquies, & 5 pono

in quotiente: dein divisorem 24 multiplico per 5, & productum 120 scribo inferius, ut sit 0 sub 4. 2 sub 3. 2 sub 1. & subtracto 120 à 134 remanebit 14, qui scribatur supra, ut sit 4 supra 4. & 1 supra 3.

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 \times 34 \\
 \hline
 4 \\
 12 \\
 120 \\
 \hline
 124 \\
 120 \\
 \hline
 44 \\
 40 \\
 \hline
 4
 \end{array}
 \quad (456)$$

Denique divisorem 24 adhuc uno loco promoveo. ut sit 2 sub 4 & 4 sub altero 4. Tum quoties 2 in 14, septies (propter rationem modo datam) nimium est; quare sumo 2 in 14 sexies, & 6 pono in quotiente; deinde multiplicato divisore 24 per 9 venit 144,

illud productum scribo inferius ut sit 4 sub 4: 4 sub 4, & 1 sub 1, & subtraho 144 à 144, & remanet 0: quare absoluta erit divisio.

EXEMPLUM III.

$$\begin{array}{r}
 140 \\
 \times 22 \\
 \hline
 28 \\
 280 \\
 \hline
 308
 \end{array}
 \quad (3)$$

Sit dividendum 87822 per 246, divisore scripto loco debito, quæro quoties 2 in 8 non 4 vicibus (ne divisore per quotien-

De Multiplicatione Integrorum. 49

tientem multiplicato veniat productum nimis magnum) sed tantum 3. pono itaque 3 in quotiente, & per illum divisorem multiplico, unde acquiritur 738, quod pono infra 878, & ab illo subtrabo, ut remaneat 140.

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 7 \\
 2 \quad 4 \quad 8 \quad 2 \\
 8 \quad 7 \quad 8 \quad 2 \quad 2 \quad (38 \\
 2 \quad 4 \quad 8 \quad 8 \\
 2 \quad 4 \\
 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \\
 2 \quad 2 \quad 8
 \end{array}$$

Deinde divisorem uno loco promoveo. & quero quoties 2 in 14: non 7 aut 6 vicibus sed 5 vicibus: pono 5 in quotiente, cujus productum 1230 inferius pono sub 1402, & ab illo subtraho, ut maneat residuum 172.

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 7 \\
 2 \quad 4 \quad 8 \quad 2 \\
 8 \quad 7 \quad 8 \quad 2 \quad 2 \quad (357 \\
 2 \quad 4 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \\
 2 \quad 4 \quad 8 \\
 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 2 \\
 2 \quad 2 \quad 8 \quad 2 \\
 2 \quad 2
 \end{array}$$

Deinde divisore uno loco promotus, quero quoties 2 in 17, non 8, sed 7 vicibus, & pono 7 in quotiente, per quem divisore multiplicato, oritur productum 1722, quod inferius pono sub 1722, & ab illo subtraho: quo facto remanet 0, & perfecta erit divisio.

EXEMPLUM IV.

$$\begin{array}{r}
 8 \quad (6 \\
 2 \quad 8 \quad 8 \quad (4 \\
 2 \quad 8 \quad 8 \quad 0 \quad (14 \\
 2 \quad 0 \\
 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \\
 8 \quad 8
 \end{array}$$

Dividendum sit 2864 per 200, operando ut supra acquiritur quotiens 14, & remanent 64, cui si cum lineola subscribatur divisor erit plenus quotiens 14

$$\begin{array}{r}
 64 \\
 \hline
 200
 \end{array}$$

D

Quem

Quem quotientem brevius & absque operosa divisione nobis exhibet sequens

Hinc sequitur

Compendium I.

$$\begin{array}{r} 28 \overline{) 64} \\ 2 \end{array} \quad (14 \frac{64}{100}$$
 A dividendo aufer tot notas 64, quot divisor habet Nullas seu 0, & reliquas notas 28 divide per divisoris notam significativam 2; Divisione peracta (quæ hic nihil relinquit) abscissis notis 64 cum lineola subscripto divisore obtinebitur ut ante totus quotientis $14 \frac{64}{100}$.

Hinc jam immediate fluit

Compendium II.

Si una nota significativa sit unitas seu 1, & reliquæ omnes versus dextram sint Nullæ, seu 0, à dividendo abscindantur tot notæ ad dextram quot divisor habet Nullas; si tum reliquas scribes post lunulam, & illis adjungas abscissas cum subscripto divisore habebis quotientem questum.

$$\begin{array}{r} 23 \overline{) 4} \\ 1 \end{array} \quad (23 \frac{4}{10} \quad \begin{array}{r} 56 \overline{) 89} \\ 1 \end{array} \quad (56 \frac{89}{100} \quad \begin{array}{r} 34 \overline{) 567} \\ 1 \end{array} \quad (64 \frac{567}{1000}.$$

E X E M P L U M V.

$$\begin{array}{cccccccc} & \# & \# & \# & \# & & & \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# & \\ & \# & \# & \# & \# & \# & & \\ & \# & \# & \# & \# & & & \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# & \\ & \# & \# & \# & \# & & & \end{array} \quad (52000$$

Dividendum sit 1248000 per 24; quæ divisio si fiat juxta regulas præcedentes & earum præxin invenietur quotientis 52000.

Qui

De Distione Integrorum.

51

Qui etiam obtinebitur si tantum 1248 dividantur per 24, (quod fit absque residuo) & quotienti 52 adjungantur omnes dividendi Nullæ, ut fiat 52000.


Line sequitur

Compendium III.

Cum dividendus ad dextram habeat Nullas, & post divisionem omnes significativa evanescent, quotienti appone tot Nullas, quot post ultimum membrum significativum restant in dividendo.

3000	3000	3000	(400. Et sic de caeteris.
600	3000	300	

EXEMPLUM VI.



$$\begin{array}{ccc|cc} \bullet & \bullet & \bullet & \circ & \circ \\ \bullet & \bullet & \bullet & \circ & \circ \\ \bullet & \bullet & \bullet & \circ & \circ \end{array} (423).$$

Hinc deducitur.

Sit dividendum 84600; per
Ex qua divisione juxta regulas
datas facta, obtinebitur quo-
tiens 423.

Qui quotiens etiam acquiritur si
tam in dividendo quam diviso-
re abscondantur Nullæ, & re-
liqua per se invicem dividan-
tur, hoc modo

Compendium IV.

Cum & dividendus & divisor ad dextram habeant Nullas seu 0 unam aut plures, utrinque abscinde æqualem Nullarum numerum, & cum reliquis divisionem institue.

$$\begin{array}{r|l} 128 & 00 \\ 44 & 00 \\ \hline 128 & \end{array} (30$$

$$\begin{array}{r|l} 128 & 000 \\ 21 & 000 \\ \hline 128 & \end{array} (640.$$

Divisio diversarum Specierum.

Quemadmodum Multiplicatione utimur in reductione majorum Specierum ad minores, ita e contra Divisionem adhibemus quando requiritur ut minores species iterum reducantur ad majores; id quod fit dividendo numerum minorum specierum per numerum indicantem quot ex minori specie in majori contineantur: Istius divisionis sequentia damus exempla.

E X E M P L U M I.

Quæritur 68800 denarii quot imperiales faciant, quorum unus valet 50 stuferos.

$$\begin{array}{r} 68800 \\ 128 \overline{) 68800} \\ \underline{64000} \\ 4800 \\ 4480 \\ \underline{320} \end{array} (4300. \text{Stuferi.}$$

$$\begin{array}{r} 68800 \\ 128 \overline{) 68800} \\ \underline{64000} \\ 4800 \\ 4480 \\ \underline{320} \end{array} (86 \text{ Imperiales.} \\ \text{quæriti.}$$

Quia

De Divisione Integrorum. 53

Quia 16 denarii faciunt 1 stuferum, numerum datum divido per 16; & acquirō numerum stuferorum. Tum quia 50 stuferi faciunt 1 Imperialem, inquirō quoties 50 in numero stuferorum contineatur, hoc est, numerum stuferorum divido per 50, & quotiens indicat numerum Imperialium quæsitum.

E X E M P L U M I I.

Quæritur 102400 denarii quot faciant Ducatos, quorum quolibet continet 100 stuferos.

$$\begin{array}{r}
 102400 \\
 16 \overline{) 102400} \\
 \underline{96} \\
 6400
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 6400 \\
 50 \overline{) 6400} \\
 \underline{50} \\
 1400
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1400 \\
 100 \overline{) 1400} \\
 \underline{100} \\
 4
 \end{array}$$

N Numerus
D Ducatorum.

Primo ut supra numerum denariorum divido per 16, ut veniat numerus stuferorum; quem deinde divido per 100, & habeo numerum Ducatorum.

E X E M P L U M I I I.

Quæritur 345689 Grotae quot faciant Libras.

$$\begin{array}{r}
 345689 \\
 12 \overline{) 345689} \\
 \underline{24} \\
 105689 \\
 \underline{96} \\
 9689 \\
 \underline{84} \\
 1289 \\
 \underline{12} \\
 89
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 28807 \\
 2 \overline{) 28807} \\
 \underline{4} \\
 8807 \\
 \underline{8} \\
 807 \\
 \underline{8} \\
 7
 \end{array}$$

S Solidi.
D Ducati.

Numera Grotarum divido per 12, ut acquirantur Solidi, remanent autem 5 Grotæ. Deinde numerum Solidorum divido per 20, ut veniant Libræ: in qua divisione remanent 7 Solidi; ita ut 345689 Grotæ faciant 1440 Ducatos, 7 Solidos & 5 Grotas.

Sed hæc de Multiplicatione & Divisione dicta sufficiant. Sequitur

CAPUT VIII.

De Multiplicationis & Divisionis Probatione.

Duæ hæ operationes non minus quam Additio & Subtractio sua egent demonstratione non ad examinandum illarum fundamentum seu modum operandi, sed ad inquirendum utrum in ipsam operationem vitium aliquod irrepsit aut error; id quod duobus modis fit,

Probatio Multiplicationis I.

Hæc vulgo fit per abjectionem numeri 9 quoties potest; quam licet fallacem in se, cum tamen inter bonos maximum habet locum, negligere non licet. Illa autem sic procedit.

$$\begin{array}{r}
 34567 \\
 \times 23 \\
 \hline
 703701 \\
 69134 \\
 \hline
 795041
 \end{array}$$

I. Ex multiplicatione abijce omnes 9, & residuum 7 pone a sinistra lineola.

II. Similiter ex multiplicatore residuum 5 ponatur a dextra lineolæ.

III. Duo

De Multiplicat. & Divisione. Probat. 55

III. Duo illa residua 7 & 5 per se invicem multiplica, & ex producto 35 supra 9 residuum 8 pone supra lineolam.

IV. Denique ex multiplicationis Producto principali item abijciantur omnes 9, si tum residuum idem sit cum residuo Articuli præcedentis, quod ibi erat 8, dicunt Multiplicationem vitio carere. Quod residuum Producti cum sit etiam 8, bene peracta erit Multiplicatio hujus Exempli.

Probatio Multiplicationis II.

Hæc naturæ rei magis conveniens adeoque præstantior est, & Divisione Multiplicationi contraria efficitur, scilicet Multiplicationis Productum dividendo per Multiplicatorem vel per Multiplicandum: Si sit per Multiplicatorem & acquiratur quotiens æqualis Multiplicando, bene facta erit Multiplicatio; Si vero per Multiplicandum, & veniat quotiens æqualis Multiplicatori; iterum certissimo erit indicio Multiplicationem fuisse inerroneam.

Sic quando duo numeri 3 & 4 per se invicem multiplicantur, quia multiplicatio est multiplex additio, idem est

3	4		ac si 3 quater & 4 ter sibi addantur, ut
3	4	4	utrinque veniat Additionis eadem Sum-
3	4	3	ma 12, quod idcirco erit Multiplicatio-
3			nis Productum.

12 12. 12.

Si deinde illud Productum 12 iterum debeat dividi per 3 hoc est, quia divisio est multiplex subtractio, debeat 3 a 12 subtrahi quoties potest, necessario sequitur illud posse fieri quater, quia quater fuit additus sibi ipsi ad constituendum 12.

Vel si illud productum 12 iterum debeat dividi per 4, id est debeat 4 subtrahi a 12 quoties potest videbimus illud posse fieri ter; idque necessario, quia 4 ter sibi fuit additus ad constituendum numerum 12.

Adeoque patet quemadmodum Additio per Subtractionem ita etiam Multiplicationem per Divisionem probari.

Sicut autem hanc probationem exemplo ex minoribus numeris conflato applicuimus ita etiam facile majoribus numeris applicandam relinquimus tyroni, ut exercitii arripiat materiam. Sequitur jam

Probatio Divisionis. I.

cap Per Abjectionem novenarii, quæ absolvitur hisce præ-
tis.

- I. Ex divisore abjectis omnibus 9 notetur residuum ad sinistram lineolæ.
- II. Ex quotiente similiter abjice omnes 9. & residuum colloca ad dextram lineolæ.
- III. Duo illa residua per se invicem multiplica, & venienti producto, si quid ex divisione supersit, illud adde: alias notetur tantum illud productum.
- IV. Ex isto producto si nihil post divisionem remanserit, aut ex producto & divisionis reliquo simul abjice omnes 9, & residuum pone supra lineam.
- V. Denique ex Dividendo abjice omnes 9. & notetur infra lineolam: quod si sit idem cum altero residuo, conijcere licet non vero certo concludere, Divisionem absque errore factam; at vero si duo illa residua non sint eadem aut æqualia, certissimo est indicio operationem laborare vicio.

E X E M P L U M I.

1 0 0	⊙	Sit Dividendus	3 4 5 6
3 3 3 3 (288	3 — 0	Divisor	1 2
1 2 2 2	0	Quotiens	2 8 8
1 1			
2 3 3 3			
0 0			

In Divisore acquiritur supra 9 residuum 3 ponendum ad sinistram lineam.

In quotiente supra 9 remanet 0, ponenda ab altera parte lineam: Tum 3 multiplicata per 0 facit 0, ergo supra 9 remanet 0, ponenda supra lineam.

Denique in dividendo supra 9 etiam remanet 0 ponenda infra lineam, quia jam duo illa residua sunt æqualia, conjicere licet operationem rite esse factam.

E X E M P L U M II.

1 1 0 (9		Sit dividendua	45967
4 5 5 5 5 (2089	4 — 1	Divisor	22
1 1 1 1 1	4	Quotiens	2089
4 4 0 0 0		Residuus	9
1 1 1			
1			

In divisore invenitur supra 9 residuum 4 ad sinistram lineam. In quotiente habetur residuum 1. ad dextram lineam. Tum 4 multiplicata per 1 facit 4, quod cum residuo divisionis 9 facit 13; in quo supra 9 erit 4. ponendus supra lineam.

D 5

Deni-

Denique in dividendo similiter acquiritur supra 9 residuum 4 ponendum infra lineam: unde jam suspicari possumus in Divisione nullum commissum esse errorem.

Probatio Divisionis II.

Hæc fit per Multiplicationem Divisioni contrariam, sicut enim paulo ante Multiplicatio Divisioni suam certitudinem debebat, ita vicissim Divisio a multiplicatione suam recipit confirmationem.

Illam autem probatio instituitur multiplicando Quotientem per Divisorem, aut vicissim Divisorem per Quotientem, quia omnis Multiplicatio est reciproca. Si tum istius multiplicationis productum sit æquale Dividendo certi esse possumus de veritate operationis; si vero non sit æquale verus quotientis non erit inventus.

Notandum autem in nostra dividendi Methodo simul omnium singularium multiplicationum producta notari & exhiberi quæ si addantur, & summa cum dividendo sit eadem bene facta erit divisio.

E X E M P L U M I.

<p> $\begin{array}{r} 8 \\ 2 \ 9 \ 3 \ 7 \\ 1 \ 9 \ 4 \ 1 \ 1 \ 8 \\ 4 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\ 4 \ 4 \ 4 \\ A \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \\ 4 \ 4 \ 4 \ 7 \\ 4 \ 8 \\ \hline 1 \ 9 \ 4 \ 1 \ 1 \ 8 \end{array}$ </p>	<p> Sit dividendus 104118 Divisor 42 Invenitur Quotiens 2479 In cuius Divisionis decursu per singulares quotientis multiplicationes acquiruntur singularia producta suo ordine in Anotata. </p>
--	--

Si jam

De nat. Fract. & var. circa illas Red. 59

Si jam illa addantur in unam summam, illa erit æqualis Dividendo, adeoque jam certi esse possumus de valore quotientis,

Quod si vero post divisionem absolutam aliquid super sit, illud inferioribus notis suo ordine addendum: uti illud ostendit.

E X E M P L U M I I.

$$\begin{array}{r}
 37 \\
 3343 \\
 4287 \quad (1194. \\
 3333 \\
 333 \\
 33344 \\
 3374 \\
 37
 \end{array}$$

Sit dividendus 42987
 Divisor 36.
 Fit Quotiens 1194.
 Et Residuum 3.

Si jam ordine fiat Additio numerorum inferius scriptorum, sc. primæ notæ 4 addendo residuum 3 ut fiat prima notæ 7. & tum reliqua ut ante videbimus prodire summam æqua-

lem Dividendo: id quod requirebatur, si divisio foret ab errore immunis.

Cujus rei ratio ac fundamentum facile patet ex multiplicationibus singularibus per singulas notas quotientis: nam

36 per primam notam 1 hoc est 1000 facit 36000
 36 per secundam notam 1 hoc est 100 facit 3600
 36 per tertiam notam 9 hoc est 90 facit 3240
 36 per ultimam notam — 4 facit 144
 Quibus præterea si addatur Residuum 3

Erit Summa æqualis dividendo

42987

CAPUT IX.

*De natura Fractionum, & variis circa
illas Reductionibus.*

IN precedenti Capite vidimus divisionem non semper fieri absque residuo, sed post peractam operationem aliquid sæpe remanere ex dividendo, quod acquisito quotienti adscribendum est, cum divisore infra lineolam subiecto; ipsique instar appendicis adhæret.

Illa autem appendix dicitur fractio, denotatque numerum minorem dividendum esse per divisorem majorem dividendo, qui cum in dividendo ne quidem semel contineatur, patet omnem fractionem minorem debere esse unitate, id quod etiam fractionis vox infert, quasi unitatem in partes fractam seu divisam notantis.

Sic si Unum seu Unitas sit dividenda per aliquem numerum, seu quod idem est in aliquot partes, unitati subducta lineola infra illam collocant divisorem, qui tum denotat unitatem debere dividi in tot partes æquales quoties divisor unitatem continet.

Ut si unitas debeat dividi in duas partes æquales, istam divisionem hac forma designant $\frac{1}{2}$, quæ significat unitatem divisam per 2, seu unam secundam sc; partem totius,

Sic $\frac{1}{3}$ dicit unitatem divisam per 3 seu unam tertiam

totius. Ut $\frac{1}{4}$ indicat unitatem divisam per 4, seu unam quartam partem totius, quod in hisce est unitas.

Licet

De nat. Fracl. & var. circa illas Reduct. 61

Licet enim præter Unitatem superiorem locum quilibet alius numerus occupare possit, omnes tamen fractiones considerantur respectu habito ad unitatem tanquam ad totum, divisum in tot partes quot unitates continet inferior, quarum partium tot sint sumendæ quot unitates continet

superior. Sic Ex: gr: $\frac{2}{3}$ significat duas tertias, ad cujus

valorem cognoscendum cogitamus 1 seu unitatem totum divisam in 3 partes æquales, (propter inferiorem numerum 3) & illarum tertiarum partium sumendas esse duas, ut obteneatur verus fractionis valor.

Nec etiam male rem concipiemus, si fractionem $\frac{2}{3}$ consideremus tanquam duas Unitates ceu duo tota in tres partes divisa, ac si dicere velimus unam tertiam partem duorum totorum; quæ consideratio nobis peculiarem supeditat regulam cognoscendi verum fractionum valorem respectu diversarum specierum, quibus applicantur; quemadmodum etiam altera diversæ à præcedente Regulæ nobis facit copiam.

Cæterum fractiones duobus numeris designantur supra se invicem positæ cum lineola interjecta.

Inferior dicitur Denominator, quia dicit in quas seu quales partes totum sit divisum, adeoque nominat partes sumendas.

Superior autem Numerator vocatur, quia numerat partes sumendas, seu dicit quot partes jam per inferiorem nominatas sint sumendæ.

Sic fractionis $\frac{4}{5}$ inferior 5, dicit Unitatis seu totius sumendas esse partes quintas, seu totum dividendum esse

esse in 5 partes æquales; superior autem 4 significat ex istis partibus quintis sumendas esse 4, ut habeamus iustum valorem istius fractionis.

Quibus præmissis antequam ad ultiores circa fractionem transeamus operationes, aliquot Problemata ad illas viam sternentia, resolvere visum fuit.

Problema I.

Inquirere utrum fractio proposita sit vel æqualis unitati, vel ea major vel ea minor.

Regula.

Si Numerator sit æqualis denominatori, fractio erit æqualis Unitati: sic $\frac{4}{4} \infty$ seu æqualis 1. $\frac{5}{5} \infty 1$.
 $\frac{6}{6} \infty 1$.

Id quod patet ex natura fractionum ante notata: Denominator dicit in quot partes totum sit dividendum, si jam Numerator dicat tot partes esse sumendas in quot totum fuit divisum, patet omnes partes simul hoc est totum, quod hic est unitas esse sumendam.

Sic in prima fractione $\frac{4}{4}$ totum dividendum est in 4 partes, propter denominatorem 4, illarum autem quararum partium 4 hoc est omnes seu totum hoc est Unitas erit sumenda.

Seu ex divisione hoc etiam patet; quæratur quoties 4 in 4, id quod fit semel adeoque quoties erit 1 seu unitas,

Denat. Fraet. & var. circa illas Red. 63
 tas, qui quotiens est æqualis divisioni in forma fractionis
 denotata $\frac{4}{4}$

Si vero Numerator sit major Denominatore, fractio
 erit major Unitate: Sic $\frac{5}{4}$ major quam 1: Et $\frac{6}{3}$ major
 quam 1.

Nam per modo dicta $\frac{4}{4} \propto 1$. Ergo $\frac{5}{4}$ superat 1,
 idque eadem differentia qua Numerator superat Denomi-
 natorem.

Si denique Numerator sit minor Denominatore, Fra-
 ctio erit minor Unitate: Sic $\frac{3}{4}$ minor quam 1. Ut &
 $\frac{4}{7}$ minor quam 1.

Nam juxta superiora $\frac{4}{4} \propto 1$. Ergo $\frac{3}{4}$ minores
 quam 1. Et $\frac{7}{7} \propto 1$. adeoque $\frac{4}{7}$ minor quam 1. id-
 que iterum eadem differentia partium qua Numerator su-
 peratur à Denominatore.

Problema II.

Datum numerum Integrum reducere ad formam fra-
 ctionis non mutato illius valore.

Regula.

Dato numero subscribe unitatem, linea interjecta, &
 factum erit quod quaeritur.

Sic

Sic $4 \propto \frac{4}{1}$. Et $7 \propto \frac{7}{1}$: Unitas enim est communis mensura omnium numerorum, ut & denominator qui sub omnibus intelligitur. Sic quando simpliciter quatuor dicitur, semper intelliguntur unitates: adeoque perinde est five quatuor dicatur live quatuor Unitates.

Problema III.

Datum numerum integrum reducere in formam fractionis, cujus denominator sit numerus datus, non mutato illius valere;

Regula 1.

Datum numerum integrum multiplica per denominatorem datum, & producto subscribe eundem denominatorem datum.

$$8 \propto \frac{8 \text{ in } 2}{2} \propto \frac{16}{2}.$$

$$12 \propto \frac{12 \text{ in } 3}{3} \propto \frac{36}{3}.$$

Cujus rei fundamentum statim patet, si consideremus primo numerum datum 8 multiplicari per 2, ut fiat 16, & deinde illud productum iterum dividi per eundem numerum 2, seu quod idem est, ipsi subscribi eundem numerum 2; quando necesse erit iterum prodire eundem numerum 8. qui idcirco invariatus manet in suo valore.

Regula

Regula II.

Dato numero subscribe unitatem, ut fiat fractio (per Probl: II.) cujus tam Numeratorem quam Denominatorem si multiplices per Denominatorem datum, habebis fractionem quaesitam.

$$\text{Sic } 8 \propto \frac{8}{1} \text{ \& (multiplicando utrinque per 2) } \propto \frac{16}{2}.$$

$$12 \propto \frac{12}{1} \text{ \& (multiplicando utrinque per 3) } \propto \frac{36}{3}.$$

Cujus regulæ ratio jacet in multiplicatione & divisione fractionum. Nam si fractionis $\frac{8}{1}$ Numerator 8 multiplicetur per 2 illius valor fit duplo major; sc: $\frac{16}{1}$: cujus jam Denominator 1 si iterum multiplicetur per eundem numerum 2, posterior fractio $\frac{16}{2}$ iterum fit duplo minor sc: $\frac{16}{2}$ adeoque valor fractionis $\frac{8}{1}$ hoc est numeri 8 non mutatur.

Scholium.

Sit numerus 2 reducendus ad eandem denominationem cum fractione $\frac{4}{5}$

Per Problema 2 reductus ad denominationem 5 $\propto \frac{10}{5}$ quæ cum fractione $\frac{4}{5}$ facit $\frac{14}{5}$.

E

Quod

Quod vulgo sic fieri solet, posita sc: $2\frac{4}{5}$, multiplicant
2 per denominatorem 5, & producto 10 addunt 4, ve-
nientique summa 14 subscribunt denominatorem 5, ut ha-
beat $\frac{14}{5}$ ut ante. Eodem modo in reliquis.

Problema IV.

Invenire minimum numerum qui per duos, tres aut plu-
res datos absque residuo possit dividi.

Ex dictis supra in Multiplicatione & Divisione haud
obscurè patet quendilibet numerum absque residuo posse di-
vidi per illos numeros, quorum mutua multiplicatione
possit generari.

Sic quia 3 & 4 per se invicem multiplicati faciunt 12,
hic iterum per 3 & 4 dividi poterit: ut & per 2 & 6,
quia hi mutua multiplicatione faciunt eundem nume-
rum 12.

Sic 36 generari potest ex mutua multiplicatione nume-
rorum 2, 3, 6, quia 2 in 3 facit 6 & 6 in 6 facit 36.
Vel 2 in 6 facit 12, & 3 in 12 facit 36. Vel 3 in 6 facit
18, & 2 in 18 facit 36: Adeoque 36 potest dividi per 2.
3. & 6. Vel per 6 productum ex 2 in 3 & 6. Vel per 12
productum ex 2 in 6 & 3. Vel per 18 productum ex 3 in
6 & 2.

Quibus prænotatis Numeri pro nostro Problemate da-
ti, Aut non admittunt communem divisorem, aut admit-
tunt,

Si non admittunt, observetur hæc

Regula.

De nat. Fract. & var. circa illas Reduct. 67

Regula.

Omnes numeros datos per se invicem multiplica & habebis minimum dividuum quæ situm.

Sic dati sint numeri 3. & 5. qui nullum habent communem divisorem; si illi per se invicem multiplicentur productum 15 erit minimus, qui per illos absque residuo potest dividi.

Datis 3. 7. 9. illorum productum 315 erit minimus dividuus: & sic de reliquis. Ratio patet ex modo dictis.

Ant numeri dati communem habent divisorem, & tum tum notetur hæc

Regula.

Divide numeros datos per communem istum divisorem (si sint dati plures quam duo) & quotientes iterum examina, utrum cum reliquis datis adhuc semel habeant communem divisorem, per quem, si habent, illos divide: idque quandiu potest fieri: quo facto omnes acquisitos quotientes per se invicem multiplica: si tum illud productum multiplicetur per communem divisorem primum; & si plures sint, illud productum rursus per communes divisores reliquos ordine sumtos: tandem invenietur minimus numerus dividuus quæsitus.

E X E M P L U M I.

Sint dati duo numeri 8 & 12, quorum minimus dividuus quærat.

E 2

Nu-

8	12.	
<hr/>		4 communis
2	3	divisor.
3		:
<hr/>		:
6		:
4 - - - - -		:
<hr/>		:

24. Minimus dividuus quæsitus

veniat productum 6, quod productum si jam multiplicetur per communem divisorem 4 invenitur Numerus minimus dividuus quæsitus 24.

Demonstratio.

Ex decursu Multiplicationis factæ patet numerum 24 generatum esse ex intuita multiplicatione numerorum 2, 3, 4. Atqui 2 in 4. facit 8. Ergo ex 8 in 3. adeoque 8 dividit 24. Rursus 3 in 4 facit 12, ergo ex 12 in 2; unde etiam 12 dividit 24.

EXEMPLUM II.

10	35	
<hr/>		5 Comm. divisor.
2	7	:
7	-	:
- - - - -		:
<hr/>		:
14		:
5		:
<hr/>		:

70 Minimus dividuus.

Operatio cum præcedenti est eadem.

Demonstratio.

Numerus 70 generatus est ex multiplicatione numerum 2. 5. 7.

Atqui

De nat. Fract. & var. circa illas Red. 69

Atqui 2 in 5 facit 10.

Et 5 in 7 facit 35.

Ergo 10 & 35 dividunt 70.

EXEMPLUM III.

4	12	
1	3	4 communis divis.
3	- - - - -	-
3	1 1 1 1 1	-
4	1 1 1 1 1	-
12	Minimus dividiuus.	

Numerus 12
compositus est
est ex multipli-
catione 1. 3. 4.

Atqui 1 in 4
facit 4.

Et 3 in 4 fa-
cit 12.

Ergo 4 & 12 divi-
dunt 12.

Hinc Exemplo sequens non sine fructu connectitur.

Scholium.

Si unus ex numeris datis à reliquo vel reliquis omnibus absque residuo dividi possit, ille ipse erit minimus dividiuus : quia quilibet numerus etiam per se ipsum dividitur, cum se ipsum semel contineat.

Sic numerorum 4 & 12 minimus dividiuus est 12. ut patet in Exemplo. Numerorum 3- 6. 24. minimus dividiuus est 24, quia dividitur per 3 & per 6, & per se ipsum.

Numerorum 2. 4. 8. 16, minimus dividiuus est 16: Id quod etiam juxta Regulam sic fit manifestum.

Demonstratio.

2. 4. 8. 16.

 2 Communis Divisor.

1 2 4 8.

 2 Divisor trium.

1 1 2 4

 2 Divisor duorum.

1 1 1 2.
 2

 2
 2 Divisor duorum.

4

 2 Divisor trium.

8

 2 Communis omnium divisor.

16. Minimus communis dividiuus.

E X E M P L U M IV.

5 7 20. 35.

 5. Divisor trium.

1 7 4 7

 7 Divisor duorum.

1 1 4 1

 7 Divisor duorum.

28

 5 Divisor trium.

140 Communis minimus dividiuus.

Numerus 16
 generatus est
 ex multiplicati-
 one Nume-
 rorum
 1. 2. 2. 2. 2-
 per se invi-
 cem.

Atqui 1 in 2 facit 2.
 Et 2 in 2 facit 4.
 Ut 2 in 2 in 2 fa-
 cit 8.

Denique 2 in 2 in 2
 in 2 facit 16.

Ergo

Dati numeri 1. 4.
 8. 16 dividunt
 numerum 16.

Demonstratio
 eadem cum su-
 perioribus.

Hinc

De Funct. & var. circa illas Reduct. 71
Hinc iterum sequens deducimus.

Scholium.

Si inter numeros datos sint qui alios datos absque residuo dividant, istis dividendibus neglectis quærat^rur minimus dividuus per eos qui à reliquis dividuuntur, ille erit numerus quæsitus,

Sic in hoc Exemplo 5 dividit 20 & 35. Et 7 dividit 35; quare omissis numeris 5 & 7, potuisset quæri minimus qui per 20 & 35 possit dividi: qui cum priori idem invenietur.

Similiter minimus per 3. 4. 6. 20. dividuus invenitur 60. qui etiam reperietur si tantum sumantur duo 6 & 20, neglectis 3 qui dividit 6, & 4 qui dividit 20.

Quæ omnia in Additione & Subtractione fractionum maximum habent usum; quamobrem hoc Problema paulo prolixius prosecuti sumus.

Lemma pro sequentibus.

Si cujuscunque fractionis tam Numerator quam Denominator per eundem numerum multiplicentur, valor illius non mutatur, sed manet idem.

Hoc manifestum est ex Demonstratione Regulæ II. Problematis III.

PROBLEMA V.

Fractiones diversæ denominationis ad eandem denominationem reducere.

Regula

I Quære minimum numerum qui per fractionum datarum denominatores absque residuo possit dividi : per Probl: IV.

II Deinde vide per quos numeros singuli denominatores debeant multiplicari ad constituendum istum numerum quæsitum : Id quod fit dividendo numerum istum quæsitum, (si nimirum ille sit major quam ut primo intuitu illud cognosci queat) per singulos denominatores : & quotientes erunt isti numeri.

III. Denique per eosdem numeros, qui Denominatores seorsim multiplicarunt, etiam Numeratores respectivi multiplicentur ; quibus singulis productis si tum subscribatur inventus numerus per omnes denominatores divisibilis ; factum erit quod quæritur.

i Quæ omnia exemplis fient clariora : in quibus duplex notari potest Casus ; in aliis enim Denominatores nec se invicem dividunt, nec habent communem divisorem ; in alijs autem alterutrum fit.

Casus I.

E X E M P L U M . I.

$$\frac{3}{5}$$

$$\frac{5}{7}$$

35

$$\frac{21}{35}$$

$$\frac{25}{35}$$

Numerus divisibilis per 5 & 7 est 35. quare ut ex denominatore 5 fiat 35. ille multiplicatus est per 7. ergo etiam numerator 3 debet multiplicari per 7. ut fiat fractio $\frac{21}{35} \propto \frac{3}{5}$ per Lemma.

Simi-

Denat. Fract. & var. circa illas Reduct. 73

Similiter ut ex Denominatore 7 fiat 35 multiplicatus est per 5, quare etiam illius Numerator 5 multiplicandus erit per eundem numerum 5. ut habeatur fractio $\frac{25}{35} \propto \frac{5}{7}$ per idem Lemma.

Adeoque fractiones datæ ad eandem Denominationem reductæ sic stabunt $\frac{21}{35}$ & $\frac{25}{35}$.

E X E M P L U M I I.

$\frac{2}{3} \frac{4}{5} \frac{6}{7}$ Numerus divisibilis per 3. 5. 7. ex multiplicatione istorum numerorum per se invicem oritur 105.

Ut ex denominatore 3 fiat 105 ille multiplicatus est per productum ex 5 in 7 hoc est per 35; adeoque etiam illius Numerator 2 per 35 debet multiplicari, ut fiat fractio

$$\frac{70}{105} \propto \frac{2}{3}.$$

Similiter ut ex 5 fiat 105, ille multiplicatus est per productum ex 3 in 7 hoc est per 21: quare etiam illius Numerator 4, per 21 multiplicandus est, ut veniat fractio

$$\frac{84}{105} \propto \frac{4}{5}.$$

Denique ut ex 7 fiat 105, 7 multiplicatus est per productum ex 3 in 5 hoc est per 15; unde etiam illius Numerator 6. per eundem numerum multiplicari debet, ut oriatur fractio $\frac{90}{105} \propto \frac{6}{7}$.

Adeoque fractiones ad eandem Denominationem reductæ, sic stabunt $\frac{70}{105}$ $\frac{84}{105}$ & $\frac{90}{105}$.

Quoniam omnium ratio est manifesta ex Lemmate:

E 5 cum

cum singularum fractionum Numeratores & Denominatores per eundem numerum respective sint multiplicati, adeoque valor minime mutatus est.

Notandum autem, numeros per quos multiplicari debent Numeratores singuli, etiam per divisionem posse inveniri.

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x} & \\ \cancel{x} \ \cancel{x} \ \cancel{x} & 55. \text{ Multiplicator Numeratoris 2.} \\ \cancel{x} \ \cancel{x} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x} & \\ \cancel{x} \ \cancel{x} \ \cancel{x} & 21 \text{ Multiplicator Numeratoris 4.} \\ \cancel{x} \ \cancel{x} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x} & \\ \cancel{x} \ \cancel{x} \ \cancel{x} & 15 \text{ Multiplicator Numeratoris 4.} \\ \cancel{x} \ \cancel{x} & \end{array}$$

Qui multiplicatores sunt iidem cum antea inventis.

Casus II.

E X E M P L U M I.

$\frac{3}{4}$ $\frac{5}{12}$ Qui a 4 dividit 12 erit hic communis denominator. Ut autem ex Denominatore 4 fiat 12, 4 debet multiplicari per 3; ergo etiam illius Numerator per 3, ut fiat fractio

$$\frac{9}{12} \text{ oc } \frac{3}{4}$$

Deinde Denominator 12 manet idem ergo & ejus Numerator 5. Itaque fractiones reductæ erunt $\frac{9}{12}$ & $\frac{5}{12}$.

Ex-

E X E M P L U M II.

$$\frac{2}{3} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{7}{12}.$$

Fractiones reductæ.

$$\frac{8}{12} \quad \frac{10}{12} \quad \frac{7}{12}.$$

Similiter hæ fractiones facile reducuntur ad inferiores, si bene inspiciantur ultima exempla Problematis 4. ut & exemplum hujus proxime præcedens.

E X E M P L U M III.

$$\frac{3}{4} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{4}{2} \quad \frac{6}{3}.$$

$$\frac{3}{6} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{4}{2} \quad \frac{6}{3}.$$

$$\frac{3}{6} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{4}{2} \quad \frac{6}{3}.$$

11. Communis denominator inventus juxta Problema 4.

Quare juxta superiora fractiones reductæ erunt

$$\frac{9}{12} \text{ \& } \frac{10}{12}.$$

E X E M P L U M IV.

$$\frac{2}{3} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{5}{9} \quad \frac{7}{20}.$$

Juxta Scholium 2 Probl: præcedentis omiffis denominatoribus 3 & 5 quæratum num. divisibilis per denominatores 9 & 20. ille autem inveniatur 180.

Qui

Qui numerus 180 si ordine dividatur per singulos denominatores 3. 5. 9. 20. inveniatur quod debeat multiplicari

$$\text{Denominator} \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ per } 60. \\ 5 \text{ per } 36. \\ 9 \text{ per } 20. \\ 20 \text{ per } 9. \end{array} \right\} \text{Ergo \& illius Numerat.} \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7. \end{array} \right.$$

Ut obtineantur fractiones reductæ.

$$\frac{120}{120} \quad \frac{132}{180} \quad \frac{100}{180} \quad \frac{63}{180}.$$

Scholium.

Ex hoc Problemate statim fit manifestum, quænam fractio ex pluribus datis sit omnium maxima; scilicet quando ad communem denominatorem sunt reductæ, illa quæ muneratorem habet maximum, etiam erit maxima. Sic fractionum $\frac{4}{3}$ & $\frac{2}{3}$ prior est major altera, quia 4 Numerator prioris major quam 2 numerator alterius, imo quia 4 est duplus 2, etiam prior fractio erit dupla alterius, ut sit $\frac{4}{3} \propto \frac{2}{3}$ & $\frac{2}{3}$.

PROBLEMA VI.

*Fractiones reducere ad minimos terminos,
seu (ut vulgo dicitur) abbreviare.*

Regula.

Numeratorem & Denominatorem per maximum communem divisorem divide, & quotientes iterum scribe in formam fractionis.

Exemplum.

$$\begin{array}{r|l} \text{per } 4 | & \\ \hline 8 & | \quad 2 \\ \hline 12 & | \quad 3. \end{array}$$

Quia tam Numerator 8 quam Denominator 12 per eundem numerum 4 potest dividi, quotientes 2 & 3 supra & infra eandem lineam scripti

exhibent fractionem $\frac{2}{3} \propto \frac{8}{12}.$

Demonstratio.

Data fractio $\frac{2}{3}$ per Lemma erit $\propto \frac{8}{12}$ multiplicatis Numeratore & denominatore per 4 : Jam autem hujus fractionis $\frac{8}{12}$ Numeratore & Denominatore per 4 iterum divisus acquiritur $\frac{2}{3}$ qui jam probatus est $\propto \frac{8}{12}$
vel

Vel hoc modo.

Fractionis $\frac{8}{12}$ Numeratorem 8 dividendo per 4, acquirimus fractionis propositæ quartam partem, seu totam fractionem revera dividimus per 4 ut fiat quotiens $\frac{2}{12}$.

Dividendo autem istius quotientis $\frac{2}{12}$ Denominatorem 12 per 4, iterum idem est ac si illum multiplicemus per 4. & acquirimus $\frac{2}{3}$. Ita ut fractio proposita prius dividatur per 4, & postea ille quotiens multiplicetur iterum per 4; adeoque valor illius non mutetur: quare erit $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Quia vero non semper maximus ille communis divisor primo intuitu sese prodit, præsertim si fractio majoribus constat terminis; ad illum inveniendum sequens notetur.

Regula Generalis.

Denominatorem divide per Numeratorem: & hunc iterum (neglecto semper quotiente) divide per residuum primæ divisionis, si quod fuerit: Deinde iterum hunc divisorem divide per residuum secundæ divisionis: & sic porro donec nihil remaneat: Eritque postremus divisor communis divisor maximus quæsitus.

EXEM.

E X E M P L U M I.

$$\begin{array}{r} \overline{157} \left\{ \begin{array}{l} 40 \\ 40 \\ 40 \end{array} \right. \\ \begin{array}{l} 157 \\ 157 \\ 157 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{r} \overline{38} \left\{ \begin{array}{l} 1P \\ 1P \\ 1P \end{array} \right. \\ \begin{array}{l} 38 \\ 38 \\ 38 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{r} \overline{19} \left\{ \begin{array}{l} 1Q \\ 1Q \\ 1Q \end{array} \right. \\ \begin{array}{l} 19 \\ 19 \\ 19 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{r} \overline{0} \left\{ \begin{array}{l} 2R \\ 2R \\ 2R \end{array} \right. \\ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \end{array}$$

Sit invenire ~~maximus~~ ~~communis~~ divisor fractionis $\frac{95}{437}$. Divide Denominatorem 437 per Numeratorem 95, venit quotiens 4, & remanent 57. Tum divide 95 per residuum 57. prodit 1 & remanent 38. Deinde 57 per 38, acquiritur 1 & restat 19. Denique 38 per 19, venit quotiens 2 & restat 0 seu nihil. Quare hic ultimus divisor 19 erit maximus communis divisor Numeratoris & Denominatoris.

Et fractionis propositæ $\frac{95}{437}$ termini per 19 divisi ad minimos terminos reducti sic stabunt $\frac{5}{23}$.

Demonstratio.

$$\begin{array}{r} 19 \text{ dividit } 38 \text{ in R.} \\ 38 \text{ ——— } 38. \text{ in } Q \\ \hline \text{Ergo} \\ 19 \text{ dividit } 38. \\ 19 \text{ ——— } 19. \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 19 \text{ dividit } 38 \text{ in R.} \\ 38 \text{ ——— } 38. \text{ in } Q \\ \hline \text{Ergo} \\ 19 \text{ dividit } 38. \\ 19 \text{ ——— } 19. \end{array}} \right\} A.$$

Ergo

$$\begin{array}{r} \text{Ergo} \\ 19 \text{ dividit } 57 \\ 57 \text{ --- } 57 \text{ in P} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Ergo} \\ 19 \text{ dividit } 57 \\ 19 \text{ --- } 38 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 19 \text{ dividit } 57 \\ 19 \text{ --- } 38 \end{array}} \right\} \text{A}$$

$$\begin{array}{r} \text{Ergo} \\ 19 \text{ dividit } 95 \\ 95 \text{ --- } 380 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 19 \text{ dividit } 95 \\ 95 \text{ --- } 380 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{qui est Numerator} \\ \text{in O} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Ergo} \\ 19 \text{ dividit } 380 \\ 19 \text{ --- } 57 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 19 \text{ dividit } 380 \\ 19 \text{ --- } 57 \end{array}} \right\} \text{A}$$

$$19 \text{ dividit } 437 \text{ qui est Denominator.}$$

Q. E. D.

EXEMPLUM IV.

Oporteat reducere fractionem $\frac{63}{159}$ ad minimos terminos.

$$\begin{array}{r} 3 \ 3 \\ \cancel{3} \ \cancel{3} \ \cancel{3} \\ \cancel{3} \ \cancel{3} \ \cancel{3} \end{array} \left| \begin{array}{l} 2 \text{ O} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 3 \ 0 \\ \cancel{3} \ \cancel{3} \\ \cancel{3} \ \cancel{3} \end{array} \left| \begin{array}{l} 1 \text{ P.} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \cancel{3} \ \cancel{3} \\ 3 \ 0 \ 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} 1 \text{ Q.} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \\ \cancel{3} \ \cancel{3} \\ \cancel{3} \ \cancel{3} \end{array} \left(\begin{array}{l} 10 \text{ R.} \end{array} \right.$$

Quia divisio ultima tandem absque residuo perficitur, per divisorem 3, ille etiam erit communis maximus divisor.

Qua

De nat. Fract. & var. circa illas Red. 81

Quare autem 3 fractionis $\frac{63}{159}$ sit communis Divisor ex factis Divisionibus sic patet.

$$\begin{array}{r} 3 \text{ dividit } 30 \\ 3 \text{ ———} \end{array} \left. \begin{array}{l} 30 \\ 3 \end{array} \right\} A. \mid \text{ex 10 in 3, ut patet in R.}$$

Ergo

$$\begin{array}{r} 3 \text{ dividit } 33 \\ 3 \text{ ———} \end{array} \left. \begin{array}{l} 33 \\ 30 \end{array} \right\} A. \mid \begin{array}{l} S. \\ R. \end{array}$$

Ergo

$$\begin{array}{r} 3 \text{ dividit } 63 \\ 63 \text{ dividit } 126 \end{array} \mid \begin{array}{l} \text{Qui est Numerator,} \\ \text{ex 63 in 2, ut in O.} \end{array}$$

Ergo

$$\begin{array}{r} 3 \text{ dividit } 126 \\ 3 \text{ ———} \end{array} \left. \begin{array}{l} 126 \\ 33 \end{array} \right\} A. \mid S.$$

Ergo

$$3 \text{ dividit } 159. \text{ qui est Denominator. Q. E. D.}$$

Notandum autem si pro ultimo divisore acquiramus 1 seu unitatem terminos fractionis datæ non admittere communem divisorem præter unitatem quæ non dividit; adeoque etiam fractionem imperatam ad simpliciores reductionem respicere.

E X E M P L V M.

Data sit fractio $\frac{14}{37}$

$$\begin{array}{r|l} 9 & \\ \hline 3 & 3 \\ 7 & 7 \\ 2 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 5 & \\ \hline 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 5 & \\ \hline 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 0 & \\ \hline 7 & 7 \\ 4 & \end{array}$$

Adeoque Ultimus divisor 1 erit communis divisor : qui cum non dividat , sequitur fractionem propositam esse irreducibilem seu Minime posse abbreviari.

PROBLEMA VII.

Invenire valorem propositæ fractionis.

Cum rarissime contingat in commercio humano numeros usurpari simpliciter tantum & in se spectatos sine ulla applicatione ad subjectam aliquam materiam quæ sub numerum possit cadere ; E contra autem numeri maximam partem adhibeantur in mercatura , & permutatione mercium , quæ ad certum constituuntur pretium , vel pondus aut similia ; hinc operæ pretium erit inquirere in modum quo respectu pretii seu pecuniæ aut ponderis possit quam proxime explicari valor cujuscunque fractionis ; illud autem duobus modis potest fieri.

Regula 1.

Numerum indicantem quoties species in quaestione notata proxime sequentem continet, divide per denominatorem fractionis propositæ, & quotientem per Numeratorem multiplica: eritque Productum valor quaesitus.

E X E M P L U M I.

Quæritur quantum valeat $\frac{2}{5}$ floreni.

Stuferi unus floreni	20.	} D
Denominator datus	5	
	<hr/>	
Quotiens	4.	} M.
Numerator	2	
	<hr/>	

Valor quaesitus \propto Stuferis 8.

In hoc Exemplo species in quaestione notata est florenus: itaque numerus indicans speciem proxime sequentem sc: stuferorum, est 20. quia florenus facit 20 stuferos: una quinta pars floreni seu 20 stuferorum facit 4 stuferos, ergo datur quinta 8 stuferos.

E X E M P L U M II.

Quæritur quantum valeant $\frac{3}{4}$ stuferi.

Denarii unus stuferi	16	} D.
Denominator datus	4	
<hr/>		

$$\begin{array}{r} \text{Quotiens} \\ \text{Numerator} \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ 3 \end{array} \} M.$$

Valor quæsitus ∞ denariis 12.

Quia stuferus, utpote species in quæstione notata, continet 16 denarios: istum numerum indicantem 16 dividere oportet per 4 denominatorem; ut veniat una quarta pars stuferi seu 16 denariorum sc: 4 denarii: cujus triplum, seu tres partes quartæ faciunt 12 denarios.

Ratio hujus Regulæ in hoc sita est, quod unitas consideretur tanquam totum divisum in partes à denominatore significatas, quarum tot sunt sumendæ quot Numerator imperat.

Sic in Exemplo 1, ponitur $\frac{2}{5}$, hoc est, duæ quintæ unius floreni.

Et in Exemplo 2, $\frac{3}{5}$, hoc est, tres quartæ unius stuferi.

Regula II.

Propositæ fractionis Numeratorem multiplica per numerum indicantem speciem proxime sequentem, & productum divide per denominatorem fractionis: Eritque quotiens Valor quæsitus.

EXEMPLUM I.

Sit idem cum primo Regulæ I. sc: $\frac{2}{3}$ flor: quantum facit?

Nu-

De nat. Fract. & var. circa illas Red. 85

Numerator datus	$\frac{2}{20}$	} M.
Numerus indicans stuferos		
Productum \propto stuferis	$\frac{40}{5}$	} D.
Denominator datus		
Quotiens, Valor quæsitus \propto stuferis 8 ut ante.		

E X E M P L U M I I.

Iterum idem cum altero : $\frac{3}{4}$ stuferi quantum va
let?

Numeratur datus	$\frac{3}{16}$	} M.
Numerus indicans denarios		
Productum \propto denariis	$\frac{48}{4}$	} D.
Denominator datus		

Quotiens seu Valor quæsitus \propto stuferus 12. ut su-
pra.

Cujus Regulæ fundamentum est, quod Numerator
consideretur tanquam totum divisum in partes a Denomi-
natore notatas.

Sic in Exemplo I: fractio $\frac{2}{5}$ significat unam partem
quintam duorum florenorum.

Ut & in Exemplo 2. $\frac{3}{4}$ denotat unam quartem par-
tem trium stuferorum.

PROBLEMA VIII.

Invenire qualem partem alicujus speciei faciat quilibet numerus propositus.

Regula.

Numerum datum divide per numerum indicantem quoties species in quaestione notata proxime sequentem speciem continent; aut si hæc divisio absque residuo fieri non possit, colloca in forma fractionis: Illa ipsa aut ejus abbreviata dabit partem quaesitam.

E X E M P L U M I.

Quæritur, quam partem unius floreni faciant 16 stufieri?

$$\begin{array}{r|l} 16 & 4 \\ 20 & 5 \end{array} \text{ floreni.}$$

Numerus indicans quoties florenus contineat proxime sequentem speciem, sc. stufierum, est 20. per quem si dividatur datus numerus 16, ha-

$$\text{bebitur } \frac{16}{20} = \frac{4}{5}.$$

Demonstratio.

Ex Arithmetica integrorum notum est, quando stufieri reducuntur ad florenos, summam stufierorum debere dividi per tot stufieros, quot in floreno contineantur sc: per 20: in tali enim casu nihil aliud quaeritur, quam quoties unus

De nat. Fract. & var. circa illas Reduct. 87
 unus florenus, hoc est, 20 stuferi contineantur in numero proposito. Illud autem per divisionem innotescit, & tum.

Si dividendum est majus divisore acquiritur quotiens major unitate, hoc est, acquiritur plus quam unus florenus.

Si vero dividendum sit minus divisore 20, ut in hoc nostro Casu, obtinetur quotiens unitate minor, hoc est minor uno floreno, adeoque aliqua pars floreni, quæ tum per abbreviationem terminis simplicissimis expressa dabit partem vel partes quæsitas.

E X E M P L U M I I

Quæritur quantam partem floreni faciant stuferi $2\frac{10}{19}$.

$2\frac{10}{19}$ Reducta per Probl. III. sic stabit $2\frac{48}{19}$ } Divide.
 20.

$$\frac{48}{380} \propto \frac{12}{95} \text{ unius floreni}$$

E X E M P L U M III.

Stuferi 16, denarii $5\frac{9}{11}$ quam partem floreni faciunt,

$$\begin{array}{r} M \left\{ \begin{array}{l} 16 \\ 16 \\ \hline 96 \\ 16 \end{array} \right. \end{array}$$

A $2\frac{5}{5}$ 6 denarii in 16 stuferis conti.

Tum 20 stuferi etiam reducantur ad partes undecimas denarii.

$$\begin{array}{r} 20 \\ 16 \end{array} \} M.$$

$$\begin{array}{r} 120 \\ 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 261 \text{ M.} \\
 \hline
 11 \\
 261 \\
 261 \\
 \hline
 2871 \\
 \hline
 11 \\
 \hline
 9 \\
 \hline
 11
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} 261 \\ 261 \\ 2871 \\ 11 \\ 9 \\ 11 \end{array}} \right\} \text{A.}$$

$$\begin{array}{r}
 320 \text{ Denarii in floreno.} \\
 \hline
 11 \\
 320 \\
 320 \\
 \hline
 3520 \\
 \hline
 11
 \end{array}$$

$$\frac{2880}{11} \text{ Denarii æquales } 16 \text{ stuf. } 5 \frac{9}{11} \text{ den.}$$

Quare $\frac{2880}{11}$ dividatur p $\frac{3520}{11}$, Et deletis denominatori-

bus fiet quotiens

$$\frac{2880}{3520} \left| \frac{10}{288} \right| \frac{2}{144} \left| \frac{2}{72} \right| \frac{2}{36} \left| \frac{4}{9} \right| \frac{11}{11}$$

Nota si fractio $\frac{2880}{3520}$ utrinque dividatur per 320 statim
 obtineri simplicissimam $\frac{9}{11}$.

CAPUT X.

De Additione Fractionum.

Aut fractiones addendæ sunt ejusdem denominationis
 aut non sunt

Si sunt ejusdem denominationis, hæc obser vetur

Regula

Regula.

Numeratores addantur in unam summam, & tum summæ cum lineola interjecta subscribatur communis denominator, & habebitur Summa quæsitæ.

E X E M P L U M.

$$\frac{5}{7} \quad \frac{6}{7} \quad \text{Sint addendæ } \frac{5}{7} \text{ \& } \frac{6}{7} \text{ Summæ}$$

$$\frac{11}{7} \propto 1 \frac{4}{7} \quad \begin{array}{l} \text{Numeratorum } 11 \text{ subscribatur} \\ \text{denominator Communis } 7, \text{ \&} \\ \text{habebitur summa quæsitæ } \frac{11}{7} \end{array}$$

seu dividendo 11 per 7, invenietur $1 \frac{4}{7}$. Et sic de cætur.

Si non sint ejusdem denominationis, per Probl: V, ad eandem reducantur, & porro fiat juxta eandem Regulam præcedentem.

E X E M P L U M I.

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{3}{8} \quad \begin{array}{l} \text{Quia denominatores } 2 \text{ \& } 4 \text{ tertium} \\ 8 \text{ dividunt, erit ille communis de-} \\ \text{nominator, per Probl: V.} \end{array}$$

Ut jam ex 2 fiat 8, debet 2 multiplicari per 4 ergo & 1,
ut fiat $\frac{4}{8}$

Sic ut ex 4 fiat 8, debet 4 multiplicari per 2 ergo & 1,
fiat $\frac{2}{8}$

Denominator 8 manet idem, ergo & 3, quare ponatur $\frac{3}{8}$.

Atque fractiones ad eandem denominationem reductæ sic stabunt.

$$\begin{array}{ccc} \frac{4}{8} & \frac{2}{8} & \frac{3}{8} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Et numerorum summa 9,} \\ \text{subscripto communi denomina-} \\ \text{tore 8, erit summa fractionum} \\ \propto \frac{9}{8} \propto 1 \frac{1}{8}. \end{array}$$

Quas fractiones ad modum vulgarem etiam sic ponere licebit.

$$\begin{array}{r|l} \frac{1}{2} & 8 \\ \frac{1}{4} & 4 \\ \frac{3}{8} & 2 \\ \hline & 3 \\ & \frac{9}{8} \end{array}$$

Numerus per quem 2 debet multiplicari, ut fiat 8, obtinetur dividendo 8 per 2, & per quotientem 4 multiplicatur ejus Numerator 1, ut fiat 4 a latere ponendus.

Eodem modo dividendo 8 per 4. acquiritur 2, qui illius numeratorem 1 multiplicat, & venit 2

Tandem 8 diviso per 8, habebitur 1, qui numeratorem 3 multiplicat, & producitur 3, qui numeri additi faciunt 9, & hic cum denominatore subscripto dat $\frac{9}{8} \propto 1 \frac{1}{8}$

Scholium.

Si proponantur duæ fractiones addendæ, quarum Numeratores sunt Unitates; tum adde Denominatores, & summæ subscribe productum eorundem & habebis summam fractionum quæsitam.

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{6} \text{ Summa quæsitæ.}$$

Denominatores 2! & 3
additi faciunt 5, multipli-
cati vero 6, adeoque $\frac{5}{6}$
erit summa fractionum.

Si sint binarii, duplum summæ denominatorum cum eorum producto infra posito præbebit summam.

$$\frac{2}{3} \quad \frac{2}{5}$$

$$\frac{16}{15} \propto 1 \frac{1}{15}$$

Si sint ternarii, triplum summæ denominatorum cum eorundem producto infra posito præbebit summam.

$$\frac{3}{4} \quad \frac{3}{5}$$

$$\frac{27}{20} \propto 1 \frac{7}{20}$$

Si quaternarii, quadruplum summæ denominatorum cum eorundem producto exhibebit summam.

$$\frac{4}{5}$$

$$\frac{4}{7}$$

$$\frac{48}{35} \left\{ \begin{array}{l} 13 \\ 35 \end{array} \right. \text{ \& sic porro in infinitum.}$$

E X E M P L U M II.

$\begin{array}{r} 8 \frac{3}{4} \\ 9 \frac{5}{6} \\ 12 \frac{6}{7} \\ \hline 29 \frac{205}{84} \\ 2 \frac{37}{84} \\ \hline 31 \frac{37}{84} \end{array}$	$\begin{array}{r} 84 \\ 63 \\ 70 \\ 72 \\ \hline 205 \\ 84 \\ \hline 37 \\ 84 \end{array}$	$\left\{ \begin{array}{l} 4 \ 6 \\ 2 \ 3 \\ 3 \ 4 \\ 6 \ 5 \\ 2 \ 7 \\ \hline 12 \ 1 \\ 7 \ 1 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{2. Fiat juxta Probl. IV.} \\ \text{M} \\ \text{M} \\ \text{M} \\ \text{comm. divid. n. 4. \& 6.} \\ \text{M} \end{array}$
---	--	--

84 communis dividuus trium
4. 6 & 7, & communis
denominator fractio-
num,

Diviso 84 per 4, venit 21, multiplicator numeratoris 3, ubi venit 63.

Diviso 84 per 6, venit 14, multiplicator numeratoris 5, & prodibit 70.

Di-

De Subtractione Fractionum. 93.

Diviso 84 per 7 venit 12, multiplicator numeraroris 7.
& oritur 72.

Tum numeratoribus 63. 70. & 72 additis habetur
205, & subscripto denominatore communi, obtinetur

$$\frac{205}{84} \propto 2 \frac{37}{84} \text{ quod cum numeris integris additum}$$

facit summam totalem quæsitam $3 1 \frac{37}{84}$.

CAPUT XI.

De Subtractione Fractionum.

Aut fractiones subtrahendæ à se invicem sunt ejusdem
denominationis aut non sunt.

Si sint ejusdem denominationis, sequens notetur

Regula.

Minorem Numeratorem à majori subtrahe, & residuo
cum interjecta lineola subscribe denominatorem commu-
nem, & obtinebitur Residuum quæsitum.

EXEMPLUM.

$$\begin{array}{r} 9 \\ 15 \\ \hline 4 \\ 15 \\ \hline \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 9 \\ 15 \\ \hline 4 \\ 15 \\ \hline \end{array}} \right\} S.$$

Subtrahe 4 a 9, & residuo 5 sub-
scribe communem denominatorem
15, eritque residuum $\frac{5}{15}$, hoc est

$$\frac{5}{15} \int \frac{1}{3} \text{ per 3 ad minimos terminos } \frac{1}{3}$$

Si

Si vero non sint ejusdem denominationis, per Probl. V. ad eandem reducantur, & tum ulterius procedatur juxta Regulam.

E X E M P L U M I.

$$\begin{array}{r|l}
 & 35 \\
 6 & 30 \\
 \hline
 7 & \\
 2 & 14 \\
 5 & \\
 \hline
 & 16 \quad 8 \\
 & 30 \quad 15
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} 9$$

Juxta præcedentia invenitur communis denominator 35.

Diviso 35 per 7 venit 5; per quem multiplicato numeratore 6 habetur 30.

Diviso 35 per 5 acquiritur 7, per quem multiplicato numeratore 2, obtinetur 14.

Tum subtracto 14 a 30, fit residuum 16, eique subscripto denonatore 30, residuum quæsitum erit $\frac{16}{30} \propto \frac{8}{15}$.

E X E M P L U M II.

$$\begin{array}{r|l}
 & 12 \\
 85 & 9 \\
 4 & \\
 25 & 10 \\
 6 & \\
 \hline
 59 & 11 \\
 & 12
 \end{array}$$

Datae fractiones $\frac{3}{4}$ & $\frac{5}{6}$ ad eundem denominatorem reducantur sic stabunt $\frac{9}{12}$ & $\frac{10}{12}$.

Quia autem $\frac{10}{12}$ a $\frac{9}{12}$ subtrahi nequit, unitatem hoc est $\frac{12}{12}$ summo mutuo (adjuncto pun-

cto

De Subtractione Fractionum. 95

80 numero integro 5) & subtraho $\frac{10}{12}$ a $\frac{11}{12}$ remanent

que $\frac{2}{12}$ quibus iterum addo $\frac{9}{12}$ fitque residuum fractio-

num $\frac{11}{12}$. quo facto non 25 sed 26 subtraho a 85 (ut supra

in subtractione dictum est) & acquiritur residuum quæsi-

tum 59 $\frac{11}{12}$.

Quibus rite perceptis reliqua nullam parient difficultatem.

Lemma pro sequentibus.

In omnibus fractionibus servato eodem Denominatore quo Numerator fit major, eo etiam valor fractionis fit major.

Et e contra

Servato eodem Numeratore quo Denominator fit major eo valor fractionis fit minor.

Pars I.

Propositæ sint fractiones.

$$\frac{1}{12} \quad \frac{2}{12} \quad \frac{3}{12} \quad \frac{4}{12} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{6}{12} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{8}{12} \quad \frac{9}{12} \quad \frac{10}{12} \quad \frac{11}{12} \quad \frac{12}{12}$$

quæ quia eundem habent denominatorem, & earum Numeratores continuo per unitatem ascendunt, patet ipsas
fra-

fractiones in suo valore magis ac magis ascendere & augeri.

Adeoque quemadmodum 2 est duplus 1, erit quoque fra-

$$\text{ctio } \frac{2}{12} \text{ dupla } \frac{1}{12}.$$

Similiter sicut 8 est duplus ipsius 4, ita etiam fractio $\frac{8}{12}$ erit duplex $\frac{4}{12}$: id quod non tantum procedit in duplo, triplo, sed in quibuscunque multiplicibus.

Pars II.

Sint propositæ fractiones.

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{11} \quad \frac{1}{12} \quad \&c.$$

Quia eodem Numeratore manente denominator semper mutatur, qui nominat seu determinat in quas partes totum seu hic unitas debeat dividi, patet eandem istam unitatem in singulis fractionibus in alias atque alias secari partes.

Quæ partes quo jam plures ac plures statuantur, eo minores ac minores illas esse debere luce meridiana clarius est; Atqui fractio quæ habet majorem denominatorem exhibet unam ex istis pluribus partibus; ergo etiam partem minorem in suo valore. Vnde itaque sequitur, Numeratore manente eodem, quo denominator fit major,

eo valorem fractionis fieri minorem; adeoque esse $\frac{1}{7}$ minorem quam $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{12}$ minorem quam $\frac{1}{4}$

Corolla-

Corollarium

Specialiter autem notandum est, si alicujus fractionis denominator aliquoties in alterius denominatore contineatur, e contra fractionem minoris denominatoris toties in se continere fractionem majoris denominatoris.

E X E M P L U M I.

Sint propositæ fractiones $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{8}$ quemadmodum 2 in 8 quater continetur, sic e contra fractio $\frac{1}{8}$ in fractione $\frac{1}{2}$ quater continetur.

Quod patet quando $\frac{1}{8}$ quater sibi addetur $\frac{1}{8} \frac{1}{8} \frac{1}{8} \frac{1}{8}$ quæ simul faciunt $\frac{4}{8}$ hoc est per abbreviationem $\frac{1}{2}$, quæ erat proposita. Adeoque uti 8 est quadruplus 2, ita fractio $\frac{1}{2}$ erit quadrupla $\frac{1}{8}$

E X E M P L U M II.

Sic etiam $\frac{1}{2}$ continet $\frac{1}{12}$ sexies, quia minor denominator 2 in majore sexies continetur. Est enim,

G

$\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} \infty \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \infty \frac{6}{12}$$

$$\infty \frac{1}{2}. \text{ Et sic de reliquis: Sequitur}$$

CAPUT XII.

De Multiplicatione Fractionum.

Quatuor hic omnino observandi veniunt Casus.

Casus I.

Quando fractio proponitur multiplicanda per numerum integrum; cui multiplicationi infervit hæc

Regula.

Fractiois propositæ Numerator multiplicetur per numerum istum integrum, & producto subscribatur Denominator datus.

E X E M P L U M

Sit multiplicanda fractio $\frac{3}{5}$ per 4. Numerator 3 multiplicatus per 4 dat 12 pro Numeratore quaesiti producti, cui subscripto Denominatore dato 5, obtinebitur productum.

$$\begin{array}{r} \frac{3}{5} \quad 4 \\ \hline \frac{12}{5} \end{array}$$

$$\frac{12}{5}$$

De-

Demonstratio.

Quando $\frac{3}{5}$ proponitur multiplicanda per 4, revera imperatur, ut inveniatur fractio quæ sit quadrupla propositæ $\frac{3}{5}$: quanta autem illa futura sit, indagari poterit eandem fractionem quater sibi ipsi addendo; cum Multiplicatio sit compendiosa Additio.

$$\begin{array}{r}
 \frac{3}{5} \\
 \frac{3}{5} \\
 \frac{3}{5} \\
 \frac{3}{5} \\
 \hline
 \frac{12}{5}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} \end{array}} \right\} A.$$

Ex qua Additione acquiritur Summa $\frac{12}{5}$: quare etiam multiplicando Numeratorem 3 per 4 & producto 12 denominatorem 5 subscriptibendo propter rationem modo dictam obtinebitur eadem fractio $\frac{12}{5}$.

Scholium I.

Si proponatur multiplicanda fractio per numerum integrum æqualem denominatori dato, nihil aliud agendum est, quam ut deleta Denominatore, Numerator assumatur pro producto.

EXEMPLUM.

Sit multiplicanda fractio $\frac{3}{5}$ per 5; erit neglecto denominatore 5, productum Multiplicationis ∞ Numeratori 3.

Demonstratio.

Si $\frac{3}{5}$ multiplicetur per 5, per Casum I acquiritur productum $\frac{15}{5}$ quæ designatio indicat 15 dividi debere per 5, quod faciendo obtinemus quotientem 3. qui idcirco erit productum quæsitum. Facile enim patet, si primus aliquis numerus per secundum multiplicetur, & productum per eundem secundum iterum dividatur, necessario prodire debere primum istum numerum,

Sic 3 multiplicatus per 5 facit 15, hic divisus per 5, reddit 3.

Scholium I I

Si forte contingat ut Multiplicator integer denominatorem fractionis multiplicandæ absque residuo possit dividere, & ista divisione facta, quotiens subscribatur Numeratori dato, obtinebitur fractio æqualis producto Multiplicationis propositz

E X E M P L U M.

Sit multiplicanda fractio $\frac{5}{6}$ per 2. Juxta regulam priorem obtinebitur $\frac{10}{6}$, quæ facta abbreviatione est

æqualis fractioni $\frac{5}{3}$ quæ acquiritur juxta hoc nostrum

Scholium; dividendo scilicet Denominatorem 6 per 2, & quotientem 3 subjungendo Numeratori 5. quando etiam fit $\frac{5}{3}$ ut ante.

Unde patet in quibusdam exemplis multiplicationem posse fieri per divisionem; quot licet videatur paradoxum fundamentum tamen suum habet in Corollario Lemmatis præcedentis.

Casus II.

Ubi fractio proponitur multiplicanda per fractionem: & tum notetur hæc

Regula.

Numeratores per se invicem multiplica. & Denominatores: primum productum dabit Numeratorem; Secundum vero Denominatorem Producti quæsisit.

E X E M P L U M.

Sit multiplicanda fractio $\frac{3}{4}$ per fractionem $\frac{5}{6}$.

Numeratores 3 & 5 per se invicem multiplicati dant 15.

Denominatores vero 4 & 6 in se invicem ducti faciunt

24. Adeoque productum quæsitum erit $\frac{15}{24}$

Demonstratio.

Multiplicando fractionem $\frac{3}{4}$ per integrum nu-

merum 5. juxta Casum I acquiremus productum $\frac{15}{4}$

At vero jam multiplicatio debet fieri non per 5, sed per sextam partem numeri 5; unde jam sequitur illud produ-

ctum $\frac{15}{4}$ esse sextuplo majus eo quod quæritur, adeoque illud iterum debere dividi per 6, hoc est debere inve-

niri fractionem quæ sit sextuplo minor quam $\frac{15}{4}$. Illa

autem obtinebitur aut dividendo 15 per 6 (ut ex divisione fiet manifestum) id quod absque residuo fieri non potest; aut multiplicando denominatorem 4 per 6. ut fiat 24, &

sic acquiratur productum quæsitum $\frac{15}{24}$ quod est sextuplo minus quam $\frac{15}{4}$ ut patet ex Corollario Lem-

matæ proxime præcedentis.

Casus

Casus III.

Quando proponitur multiplicandus numerus integer cum fractione adhærente per numerum integrum seu, ut vulgo dicitur, Fractio mixta per numerum integrum, ubi usu venit hæc

Regula.

Numerus integer reducatur ad fractionem ejusdem cum fractione data denominationis, eamque adde eidem fractioni, eritque hæc summa fractio, quæ juxta Casum I multiplicanda erit per numerum integrum datum.

E X E M P L U M

Sit multiplicandum $2\frac{3}{4}$ per 5. Numerus integer 2 redus ad fractionem ¹ $\frac{8}{4}$ cujus denominator sit 4. erit $\infty \frac{8}{4}$ quæ cum $\frac{3}{4}$ in unam summam addita facit $\frac{11}{4} \infty 2\frac{3}{4}$

Quare idem est ac si fuisset multiplicanda fractio $\frac{11}{4}$ per numerum integrum 5; quæ multiplicatio juxta Casum I facit productum $\frac{55}{4} \infty 13\frac{3}{4}$

Scholium.

Poterit quoque eadem multiplicatio fieri per partes, prius multiplicando numerum integrum 2 per 5, unde fit

$$\begin{array}{r} 2 \quad 3 \quad 5 \\ 5 \quad 4 \quad \text{---} \\ 10 \end{array}$$

10. & tum fractionem $\frac{3}{4}$ per 5, &

$$\begin{array}{r} 15 \quad \infty \quad 3 \frac{3}{4} \\ 4 \quad \text{---} \quad 10 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} 15 \\ 4 \end{array}} \right\} A$$

prodit per Casum I

$$\frac{15}{4} \quad \infty \quad 3 \frac{3}{4}$$

$$13 \frac{3}{4} \text{ ut ante}$$

Quæ duo producta si addantur, obtinebitur

$$13 \frac{3}{4} \text{ idem cum superiori.}$$

Casus IV.

Quando multiplicanda datur fractio mixta per fractionem mixtam.

Regula.

Utrumque numerum reducere oportet, ad fractionem ejusdem denominationis cum fractione quam singuli habent annexam: quo facto juxta Casum I I, multiplicetur numerator per Numeratorem & Denominator per Denominatorem; & habebitur Productum.

EXEM-

E X E M P L U M.

Sit multiplicanda
quæ reductæ sic stant.

$$4\frac{5}{6} \text{ per } 2\frac{7}{8}$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ 23 \end{array} \} M.$$

$$\frac{29}{6} \text{ per } \frac{23}{8}$$

$$\begin{array}{r} \text{Productum erit } \frac{667}{48} \propto 13\frac{43}{48}. \\ \hline 87 \\ 58 \\ \hline 667 \end{array}$$

Patet itaque Casum III & IV facile reduci ad I & II,
quare illi speciali etiam non indigent Demonstratione.

Lemma.

Si duorum Numerorum per se invicem multiplicando-
rum unus per tertium aliquem numerum multiplicetur,
alter vero per eundem dividatur, acquirentur duo Numeri
quorum productum æquale erit producto duorum Nume-
rorum datorum.

E X E M P L U M.

Proponantur per se invicem multiplicandi 4 & 12.
illorum productum erit 48. Si jam unus 4 per 2 multi-
plicetur acquiritur 8. Et alter 12 per eundem 2 divi-
datur, obtinebitur 6, qui per 8 multiplicatus dabit iti-
dem 48.

Id quod universale est pro omnibus binis numeris istam operationem admittentibus : & Demonstratio niti-
tur natura proportionalium.

Quod Lemma si applicetur ad duas fractiones per se in-
vicem multiplicandas, haud contemnendum nobis affert
laboris compendium : pro quo sequens notetur

Regula

Divide unius fractionis Numeratorem & alterius De-
nominatorem per divisorem communem absque resi-
duo.

$$3 \overline{) \frac{3}{4}} \quad \text{M. per } \frac{5}{4}$$

Ergo

$$\frac{1}{4} \quad \text{per } \frac{5}{4}$$

$$\frac{5}{16}$$

Sit multiplicandum $\frac{3}{4}$ per

$\frac{5}{12}$, juxta Casum II obti-

nebitur productum $\propto \frac{15}{48}$,

quod non mutato valore
sed in simplicioribus ter-
minis invenitur sic.

Numeratorem unius fra-
ctionis 3 & Denomina-

torem alterius 12, divide per 3, & venient fractiones per
se invicem multiplicandae $\frac{1}{4}$ & $\frac{5}{4}$ quorum pro-

ductum, erit $\propto \frac{5}{16}$, quod utrinque multiplicando per

3, erit $\propto \frac{15}{48}$ ut ex superioribus jam manifestum est.

Quod

Quod autem praxis hujus Exempli conveniat cum praxi præcedentis, quod Lemmati annexum est, sic patet.

Si prima fractio $\frac{3}{4}$ dividatur per 3 (quod fit dividendo numeratorem per 3, si fieri potest, ut sequens Divisionis species docebit,) altera fractio $\frac{5}{12}$ per eundem numerum 3 multiplicari debet. Id quod fit vel multiplicando Numeratorem 5 per 3, vel dividendo Denominatorem 12 per 3. ut fiat 4. Ex superioribus enim patet fractionem $\frac{5}{12}$ esse tertiam partem fractionis $\frac{5}{4}$.

Unde jam sequitur productum quod obtinemus multiplicando $\frac{3}{4}$ per $\frac{5}{12}$ esse æquale producto, quod oritur ex $\frac{1}{4}$ per $\frac{5}{4}$.

E X E M P L U M II.

$$\begin{array}{r} \frac{1}{5) \ 5} \\ 3) \cancel{6} \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ 6 \\ \hline 20. \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} \frac{1}{2} \\ \hline \frac{3}{4} \\ \hline \frac{3}{8} \end{array}$$

id est,

5 & 20, per 5 divisi dant 1 & 4.
6 & 9 per 3 2 & 3.
ut sint multiplicandæ $\frac{1}{2}$ per $\frac{3}{4}$.
quare productum per Casum II
est $\propto \frac{3}{8}$

Cæterum majorem hujus Compendii ferimus fructum
in Exemplis, quæ majores continent Numeros.

$$\begin{array}{r}
 7 \overline{) 28} \quad \quad \quad 8 \\
 \underline{ 21} \quad \quad \quad 48 \\
 6 60 \quad \quad \quad 49. \\
 10 \quad \quad \quad 7 \\
 \text{id est} \\
 \frac{4}{10} \quad \text{per} \quad \frac{8}{7} \\
 \hline
 32 \quad \quad \quad 16 \\
 70 \quad \quad \quad \infty \frac{35}{35}
 \end{array}$$

Hic multiplicare
oportet 4 per 8 &
10 per 7: quod fa-
cilis effici potest
quam 28. per 48.
& 60 per 49

Corollarium I.

Hujus Compendii auxilio sæpe efficitur, ut multiplica-
tio possit peragi absque Multiplicatione.

E X E M P L V M.

$$\begin{array}{r}
 1 \quad \quad \quad 2 \\
 3 \quad \quad \quad 3 \\
 \hline
 4 \quad \quad \quad 9 \\
 1 \quad \quad \quad 3
 \end{array}
 \quad \text{per} \quad
 \begin{array}{r}
 1 \quad \quad \quad 2 \\
 1 \quad \quad \quad 3 \\
 \hline
 1 \quad \quad \quad 3
 \end{array}$$

quæ reducuntur ad $\frac{1}{1}$ & $\frac{2}{3}$
 quarum productum $\infty \frac{2}{3}$.

Corollarium II.

Porro hinc iterum deducitur, si fractio proponatur multiplicanda per Numerum æqualem Denominatori, quod tum Numerator sit productum quæsitum.

$$\frac{3}{6} \quad \text{per.} \quad 5.$$

hoc est,

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 5) \quad 5 \\ \hline 1 \end{array} \quad \text{per} \quad \frac{5}{1}.$$

hoc est,

$$\frac{3}{1} \quad \text{per} \quad \frac{1}{1}.$$

Et productum erit

$$\frac{3}{1} \propto 3.$$

Scholium.

Cum Multiplicatio in sua natura sit multiplex additio: Additio autem numeros augeat & majores faciat; videtur numerum per alium numerum multiplicatum semper debere reddere productum quod numero multiplicando sit majus.

Cujus tamen contrarium fieri videmus, quando numeru-

CAPUT XIII.

De Divisione Fractionum.

Ubi iterum 4 notandi veniunt Casus.

Casus I.

Quando proponitur Fractio dividenda per Numerum Integrum. & tum usui erit sequens

Regula

Numeratorem (si potest fieri) per integrum datum Numerum divide , & quotienti subscribe Denominatorem datum.

Vel

Denominatorem Fractionis per eundem multiplica.

E X E M P L V M.

Sit dividenda $\frac{8}{5}$ per 2. Juxta modum 1 dividatur

$\frac{8}{5} \div 2 \} \frac{4}{5}$ quotienti 4 subscribatur denominator datus 5. ut fiat quotientus quasi-

$$\text{tus } \infty \frac{4}{5}$$

Vel juxta modum secundum Denominatorem 5 multiplica

De Divisione Fractionum.

113

plica per divisorem 2. & producto supra scribe numeratorem datum 8 ut fiat quotiens quæsitus $\frac{8}{10}$ quæ abbre-

viando per 2 fit $\frac{4}{5}$ adeoque ∞ quotienti priori.

Notandum posteriorem hunc modum semper usu venire, etiam in istis exemplis, ubi prior applicari non potest, ut in hoc Exemplo appposito.

$$\begin{array}{r} \frac{5}{5} \text{ D: p } 4. \\ \hline \text{Quot: } \frac{3}{20}. \end{array}$$

Hic loci denominator 3 per divisorem 5 absque residuo dividi nequit, quare primus commode adhiberi non potest: adeoque ad secun-

dum confugiendum, qui quotientem facit $\infty \frac{3}{20}$

Quod autem harum Regularum demonstrationem attinet, videri poterunt illa quæ paulo ante in Multiplicatione allata sunt: utpote quæ perspicuam suppeditant Demonstrationem,

Casus II.

Quando proponitur fractio dividenda per fractionem. Ubi hæc distinctio adhibenda est.

Aut enim termini fractionis dividendæ dividunt terminos dividendæ absque residuo, & tum notetur hæc Regula.

Regula.

Numerator dividendæ dividat Numeratorem dividendæ, & Denominator Denominatorem; Et isti quotientes

tes in formam fractionis positi exhibebunt quotientem quæsitum,

E X E M P L U M.

$$\begin{array}{r} \frac{6}{8} \text{ Div. } \frac{2}{4} \\ \hline \frac{3}{2} \end{array}$$

Hic Numerator 2 dividit Numeratorem 6. & Denominator 4 Denominatorem 8, quare juxta Regulam facta divisione erit quæsitus quotiens $\propto \frac{3}{2}$.

Demonstratio.

Quando Numerator 6, dividitur per Numeratorem 2, idem est ac si fractio $\frac{6}{8}$ dividatur per 2, & acquiritur quotiens $\frac{3}{8}$. At vero divisio debet fieri non per 2, sed per $\frac{2}{4}$, hoc est quartam partem ipsius 2. Quia autem nunc 2 est quadruplus divisoris dati patet quotientem $\frac{3}{8}$ etiam justo esse quadruplo minorem: quare ille per 4 multiplicandus est.

Illud autem fiet vel multiplicando Numeratorem 3. aut dividendo denominatorem 8 per 4. ut fiat $\frac{12}{8}$ vel $\frac{3}{2}$. quemadmodum hoc ex dictis ad Multiplicationem satis jam patet.

Aut termini divisoris non dividunt terminos dividendi absque residuo, & tum observetur hæc Regula.

Regula

Regula.

Termini multiplicentur per crucem, hoc est dividendi Numerator per divisoris denominatorem, & Divisoris Numerator per dividendi Denominatorem: tum postea productum subscribendo priori, habebitur quotiens quæsitus.

E X E M P L U M.

$$\frac{4}{9} \text{ D p } \frac{3}{5} \left\{ \begin{array}{l} 20 \\ 27 \end{array} \right.$$

Multiplicandum est 4 per 5. ut fiat 20. Deinde 3 per 9, ut habeatur 27: quod productum 27 si subscribatur producto 20

$$\text{Erit quotiens quæsitus } \infty \frac{20}{27}.$$

Demonstratio.

Si dividendum esset $\frac{4}{9}$ per 3, hoc esset juxta Casum I multiplicando Denominatorem 9 per 3, eritque quotiens $\infty \frac{4}{27}$. At vero cum divisor propositus sit tantum quinta pars istius divisoris 3, patet etiam illum quotientem esse quintam solummodo partem quotientis quæsitæ, unde sequitur illum quotientem $\frac{4}{27}$ multiplicandum per 5, ut justus obtineatur quotiens.

Ista autem Multiplicatio juxta Regulam antea traditam fit multiplicando Numeratorem 4 per 5; ut sic inveniat^r quotiens quæsitus $\infty \frac{20}{27}$.

Scholium.

Si jam proponatur quantitas integra dividenda per fractionem; tum integro numero in formam fractionis subscripta unitate, statim habetur Casus II,

E X E M P L U M.

$$7 \text{ D. p. } \frac{3}{4}. \text{ hoc est } \frac{7}{1} \text{ D. p. } \frac{3}{4} \left\{ \frac{28}{3} \infty 9 \frac{1}{3} \right.$$

Casus III.

Quando proponitur dividenda Fractio Mixta per Numerum integrum.

Regula.

Numerus integer cum annexa fractione reducatur ad eandem denominationem, & tum fiat Divisio juxta Casum I.

E X E M P L U M.

Divide $2\frac{3}{4}$ per 6

hoc est $\frac{11}{4}$ per 6

Quotiens $\frac{11}{24}$

Quia 11 non potest dividi per 6, ideo 4 multiplicetur per eundem 6, ut fiat quotiens quæsitus $\propto \frac{11}{24}$..

Casus VI.

Ubi datur dividenda fractio mixta per fractionem mixtam.

Regula.

Numeri integri cum annexis suis fractionibus reducantur ad eandem Denominationem. ut obtineantur duæ fractiones puræ; & postea fiat Divisio juxta Casum II.

E X E M P L U M I.

Sit dividendum $3\frac{5}{6}$ p $5\frac{1}{4}$.

hoc est $\frac{23}{6}$ p $\frac{21}{4}$

$\frac{92}{126}$ Quotiens quæsitus.

Demonstratio Casus 3 & 4. ex præcedentibus satis nota est.

Scholium

Simile & hic ut in Multiplicatione adhiberi potest Compendium, cujus praxin sequens continet

Regula

Numeratores utriusque fractionis (si fieri possit) dividantur per communem divisorem : ut & earundem Denominatores, & obtinebuntur duæ novæ fractiones, quas tum dividere oportet juxta Regulam Casus II

E X E M P L U M.

Sit. dividendum $\frac{4}{15}$ per $\frac{6}{20}$.

$$\begin{array}{r} 2) \frac{4}{15} \\ 5) \frac{6}{20} \end{array} \quad \text{p} \quad \begin{array}{r} 3 \\ 4 \end{array} \text{D.}$$

3. hoc est 4.

$$\frac{2}{3} \quad \text{p} \quad \frac{3}{4}$$

Quot. $\frac{8}{9}$.

Numeratores 4 & 6 dividi possunt per 2, veniuntque alii 2 & 3.

Ut & Denominatores 15 & 20 per 5, & inveniuntur alii 3 & 4.

Adeoque dividendum erit fractio $\frac{2}{3}$ per $\frac{3}{4}$, cujus divisionis quotiens juxta Cas. II erit $\frac{8}{9}$.

Demon-

Demonstratio.

Omnis divisio potest designari in formam fractionis, in qua dividendum fit Numerator : Divisor vero Denominator.

Sic ut dividatur 8 per 4, potest scribi $\frac{8}{4}$

Eodem etiam modo, ut dividatur fractio $\frac{4}{15}$ per $\frac{6}{20}$, poterit scribi

$$\begin{array}{r}
 \text{O} \quad \frac{4 \ a}{15 \ b} \quad : \\
 \hline
 \text{P} \quad \frac{6 \ c}{20 \ d} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
 \hline
 \text{Q} \quad \frac{2 \ f}{15 \ b \dots} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
 \hline
 \text{R} \quad \frac{3 \ g}{20 \ d \dots} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
 \hline
 \text{S} \quad \frac{2}{3} \\
 \hline
 \text{T} \quad \frac{3}{4}
 \end{array}$$

In qua fractione nulla accidet mutatio valoris si tam Numerator O quam denominator P per eundem Numerum dividatur aut multiplicetur.

Quarum O & P dividantur per 2 quod fit dividendo a & c per 2, & acquireretur fractio $\frac{Q}{R}$.

In quasi jam adhuc Q & R multiplicetur quod fit dividendo b & d per 5, inveniatur fractio $\frac{S}{T}$.

Quæ jam imperat ut dividatur $\frac{2}{3}$ per $\frac{3}{4}$ quod
H 4 juxta

juxta præcedentia faciendo obtinebimus pro quotiente

$$\text{quæſito } \frac{8}{9}.$$

Illum autem verum eſſe quotientem patebit ſi fractiones propoſitas abque iſto compendio dividamus juxta regulam Caſus II.

$$\text{D. } \frac{4}{15} \text{ p } \frac{6}{20}.$$

$\frac{80}{90}$ hoc eſt abbreviando per 10, $\frac{8}{9}$ ut ſupra.

Scholium

Quemadmodum in Multiplicatione fractionum paradoxum videtur, numerum per multiplicationem diminui; ſic hic non minus alienum a ratione diviſionis accidit tyronibus, quando vident numerum per diviſionem augeri.

Quam difficultatem facile abigemus ſi conſideremus in omni Diviſione, ſervato eodem dividendo, quo diviſor fiat minor ac minor, eo etiam quotientem ſemper fieri majorem.

Nullò enim negotio concipimus in uno & eodem Toto partem minorem ſæpius contineri, quam major: ſc:

$\frac{1}{2}$ bis continetur in 1, $\left| \frac{1}{3} \right.$ ter $\left| \frac{1}{4} \right.$ quater $\left| \frac{1}{5} \right.$ quinquies. $\left| \right.$
& ſic porro in infinitum.

Quæ unico exemplo adhuc clarius insinuasse juvabit

$$\text{Divide } 6 \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 5 \end{array} \right\} \left| \begin{array}{l} 6 \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 5 \end{array} \right\} \left| \begin{array}{l} 6 \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right\} \left| \begin{array}{l} 6 \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \right\} \left| \begin{array}{l} 6 \left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \right\} \right. \right. \\ \text{major.} \quad \text{major} \quad \text{major} \quad \text{maj.} \end{array} \right.$$

$$6 \left\{ \begin{array}{l} 6 \\ 1 \end{array} \right\} \text{major \& } \infty \text{ dividendo.}$$

Unde patet si numerus aliquis, dividatur per unitatem quotientem ex ∞ dividendo: quia scil. Unitas non dividit.

Si jam divisor fiat minor unitate, acquiretur quotiens major proxime præcedente 6, adeoque etiam major numero dividendo.

$$\text{Divide } 6 \text{ per } \frac{1}{2}.$$

$$\text{Quot. } \frac{12}{1}$$

Major quam 6.

$$6 \text{ per } \frac{1}{3}.$$

$$\text{Quot. } \frac{18}{1}$$

Adhuc major pr.

$$6 \text{ per } \frac{1}{4}.$$

$$\text{Quot. } 24$$

Major præced.

$$6 \text{ per } \frac{1}{5}.$$

$$\text{Quot. } 30$$

Adhuc major præced.

Et sic porro in infinitum diminuendo divisoem, e contra quotiens in infinitum augebitur.

H 5

Nota

Nota Generalis in omnibus & Multiplicationis & Divisionis Casibus diligenter observanda.

I Si fractio sit multiplicanda vel dividenda per integrum, haud incommode subscribitur unitas, ut sic in fractionis formam transeat.

II Et tum

Multiplicatio multiplicat per lineas parallelas, & abbreviat per crucem.

Hoc est ordinarie.

Multiplicat Numeratores datos ut & Denominatores per se invicem.

Pro Compendio vero Primæ Numeratorem & Secundæ Denominatorem & contra primæ Denominatorem, & secundæ Numeratorem per eundem communem divisorem respectivum dividit.

Divisio vero multiplicat per crucem & abbreviat per lineas parallelas.

Hoc est ordinarie

Dividendæ Numeratorem per Divisoris denominatorem, & contra dividendæ Denominatorem per Divisoris Numeratorem multiplicat.

Pro Compendio vero

Numeratores datos, ut & denominatores per communes divisores respectivos dividit.

Quæ nota, si ex præcedentibus bene perceptis mediocri tantum exercitatione in usum conferatur nulli harum Specierum exemplo rite expediendo vel minima injicietur mora.

Atque hæc de Logistica Fractionum dicta sufficiant, quæ etiam Primæ Parti commodè finem posset ponere, nisi Radicum Extractione, quæ pro Divisionis aliqua specie habenda est, illam terminare visum esset.

C A P V T XIV.

De Extractione Radicis Quadratae.

QUando Radix Quadrata proponitur extrahenda ex aliquo Quadrato, nihil aliud imperatur, quam ut quæzatur numerus qui per se ipsum multiplicatus, numerum propositum producat: Generatur enim Numerus Quadratus ex multiplicatione alicujus numeri per se ipsum.

Sic 4 multiplicatus per 4 dat 16. } Qui dicuntur
 5 per 5 25, } Numeri Qua-
 12 per 12 144. } drati.

Cum autem nulla fere possit occurrere difficultas in reperiendis quadratorum radicibus, quæ tantum unica constant nota, utpote quæ facile ex tabella sequente memoriam dari possunt.

Radices.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrata.	1.	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Ad extractionem radicum duabus aut pluribus notis constantium transibimus; Cujus fundamentum nobis sup-
 peditat sequens.

Lemma ex Prop:4. Libri II Elem: Euclidis.

Si numerus aliquis dividatur in duas partes, quadratum totius Numeri erit æquale quadratis duarum partium una cum duplo producto earundem partium per se invicem Multiplicatarum.

Demon-

Demonstratio.

Numerus 16 (qui per se ipsum multiplicatus facit 256) dividatur in duas partes 10 & 6. erit (in locum ET substituto signo + quod significat plus) 10 + 6 ∞ 16.

Si jam 10 + 6 per se ipsum multiplicetur in isto Quadrato invenientur quadrata partium 10 & 6. ∞ 100 & 36: ut bis productum ex 10 in 6. ∞ 120. quod sic patet.

$$\begin{array}{r}
 M \left\{ \begin{array}{l} 10 + 6 \\ 10 + 6 \end{array} \right. \\
 \hline
 + I. 10 \text{ in } 6 + 36 \\
 100 + I 10 \text{ in } 6. \\
 \hline
 100 + II. 10 \text{ in } 6 + 36. \\
 \hline
 \text{---} \\
 \text{hoc est } 20 \text{ in } 6.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 I I. \int. \begin{array}{l} 100 \infty 100. \\ \text{bis } 10 \text{ in } 6 \infty 120 \\ 36 \end{array} \} \\
 \hline
 256.
 \end{array}$$

Quadratum quæsitum.

Cum autem a priori jam notum sit hujus Quadrati radicem esse 10 + 6, ut inde illa eruatur, jam perinde erit quamam operandi utamur methodo, modo quæsito satisfiat, hoc est modo inveniatur radix quæsitæ 10 + 6.

De Extract. Radicis Quadratæ. 125

$$\begin{array}{r} \infty 120 \\ 100 + 2.10 \text{ in } 6 + 36 \} 10 + 6 \\ 100 + 2.10 \text{ Divisor.} \\ \quad f. 20 \\ \quad \quad 6 \} M. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 120 \quad + 36. \\ f. 20 \text{ in } 6. \\ f. 2.10 \text{ in } 6. \end{array}$$

Primo itaque ex 100 extraho Radicem, quæ est 10, a latere posita: quæ hic iterum debet per se ipsam multiplicari quia hic divisor est æqualis quotienti: productum 100 subtraho ab 100 remanet nihil.

Quia jam video in numero sequente. 2. 10 in 6, hoc est bis 10 in 6; hoc est 20 in 6. primæ radicis notæ inventæ 10 duplum (sc 20) esse multiplicatum per 6 secundam radicis notam: ut illa inveniatur, pro divisore numeri 20 in 6, assumo duplum primæ notæ 10 id est 20 (quod in omni extractione Rad: quadratæ generale est) per quem divido Numerum. 20 in 6, & acquirō quotientem + 6. quem pono in radice.

Tum illum multiplico per divisorem 20 & oritur 120 vel 20 in 6.

Deinde idem quotiens 6 adhuc semel per se ipsum multiplicetur illudque quadratum ponatur juxta 120, ut fiat tota summa $\infty 120 + 36$. qua subtracta a superioribus remanebit nihil: adeoque certi possumus esse propositi Quadrati $100 + 2.10 \text{ in } 6 + 36$ radicem quadratam esse 10 + 6.

Quia autem nunquam quadrata proponuntur resolvenda, quæ membra habeant ita separatim posita, ut ad generalem extractionis methodum viam sternamus (quæ tamen a priori methedo non nisi perparum in forma differt) nyme-

rum

rum ita per se ipsum multiplicemus, ut singula producti membra, primo seorsim collocata postea in unam summam addamus, quando sc.: acquiremus Quadratum Quæsitum.

M. $\begin{cases} 16 \\ 16 \end{cases}$

	36	a
	6.	b
	6.	c
1	..	d
2	5 6	f

In qua multiplicatione numerus
a dat quadratum numeri 6.

b unum productum ex 6 in 1 (hoc est 10)

c alterum productum ex 10 in 6.

d □ tum ab 1. hoc est 10, quod facit centum

Quæ quatuor producta jam simul addita constituunt Quadratum f.

Ubi porro patet quando divisionis lineæ ducuntur post secundam quamlibet notam incipiendo a dextra versus Sinistram, quod primum membrum contineat □ tum unum 36. Alterum vero □ 1. quod hic est 100.

Unde jam manifesta fit ratio, quare quadratum propositum post binas quasque notas in membra sit secundum ut sc. exinde certo sciamus quot notæ in radice inveniri debeant. sc.: tot semper quot obtinemus membra.

Sic eodem modo invenitur □ numeri 543.

	543		
	543.		
		9	- O
	1	2.	
	25	..	
		1	
	16	..	- P
2	0.	..	

Membri A linea Q continet □ tum Numeri 500 500.

Membri B linea P. continet □ Numeri 400 40.

Membri C linea O, habet □ numeri 3.

2	15	..	
25	0.	..	
	- Q
29	48	49	
A	B	C	

Unde jam concludimus inventi Quadrati 29 48 49 radicem constare tribus Notis.

Illam autem, si incognita sit, ex dicto quadrato erære præcedentibus rite perceptis non erit difficile.

E X E M P L U M I.

4		
2 8	4 8	4 9
5		
2 8		
2 8	3 2	
2 8	2 8	4 9
5	4	
2 8	2 8	
2 8	2 8	
2 8	2 8	

Quadrato in sua membra secto, primi membri à sinistra quære maximum \square tum in eo contentum, quod est 25, cujus radicem pono intra lineas transversas: cujus \square 25 infra positum aufero à membro 29; & restat 4.

Atque hæc est prima Operatio.

Deinde primæ notæ radicalis 5, sumo duplum, ut fiat 10 divisor, cujus notam 0 pono immediate post lineam divisionis membri sequentis.

Tum

Tum divido 44 per 10 seu 4 per 1 & invenio quotientem 4 quem scribo in radicis loco secundo.

Uterius secundum quotientem 4. multiplico per se ipsum, ut fiat $\square 16$ quod ad modum multiplicationis iterum scribo infra. Eoque facto eundem quot: 4 multiplico per 10 sc: divisorem: ut sic acquiram numeram 416, quem subduco a 448, unde mihi restat 32.

Hucusque habemus secundam Operationem

$\#$	$\#$	3 2	$\#$	4 9
$\#$	$\#$	$\#$	$\#$	$\#$
5		.4		3
$\#$	$\#$	$\#$	$\#$	$\#$
1		$\#$	$\#$	4
$\#$		1 2		
		3		

Ad radicis tertiam inveniendam notam, summo duplum duarum notarum 5 4, quod sit illas multiplicando per 2, & invenio 108. cujus notam 8 pono post lineam divisionis quæ pertinet ad membrum sequens. & reliquos notas porro suo ordine.

Tum divido 3 per 1, & invenio quotientem 3, quem primo multiplico per se ipsum, ut fiat $\square 9$ deinde undem quotientem 3 per divisorem 108, ut veniat sic totum productum 3 2 4 9. quo subtracto à Residuo \square ti remanet nihil. Adeoque erit operatio peracta.

Et concludo quæsitam radicem esse 543. qui antea fuit posita.

EXEMPLUM I I.

	$\begin{array}{r} 3\ 4 \\ \hline 5 \\ \hline 1\ 5 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3\ 3 \\ \hline 8 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 \\ \hline \end{array}$	Radix quæsitæ.
Div. I.	$\begin{array}{r} 1 \\ 8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3\ 3 \\ 8 \end{array}$		
Divisor I I.		$\begin{array}{r} 1\ 1 \\ 8\ 8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3\ 3 \\ 8 \end{array}$	

EXEMPLUM III.

	$\begin{array}{r} 1 \\ 6 \\ \hline 1\ 6 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3\ 3 \\ \hline 7 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 3\ 4 \\ \hline 4 \\ \hline 8 \end{array}$	Radix quæsitæ.
Div. I.	$\begin{array}{r} 1 \\ 8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1\ 3 \\ 8 \end{array}$		
Divisor II.	$\begin{array}{r} 1 \\ 8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1\ 3 \\ 8\ 8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4 \\ 8\ 4 \end{array}$	

CAPUT XV.

De Extractione Radicis Cubicæ.

Quemadmodum quilibet Numerus per se ipsum multiplicatus producit Quadratum, (ut antea vidimus) ita si illud Quadratum adhuc semel per eundem Numerum multiplicetur, producet Numerus qui Cubicus dicitur.

Sic 2 per 2 multiplicatus facit Quadratum 4, quod adhuc semel per 2 multiplicatum facit 8, qui est Cubus Numeri 2.

Ut & 5 per 5 producit \square 25; quod per 5 mult. facit Cubum 125:

Quando autem proponitur Radix Cubica extrahenda non tam est quæstio de radice Cuborum simplicium, quæ una tantum constat nota. (quæ sequente tabella memoriæ mandata erit nullius negotii)

Rad.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cubi	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

quam de Radice pluribus constante notis, quam una.

Ut autem hujus Extractionis Natura ac fundamentum clarius percipiatur, notetur sequens.

Lemma.

Si aliquis Numerus in duas partes dividatur Cubus totius Numeri erit æqualis Cubis partium, una cum Producto tripli \square ti partis I in Secundam. una cum producto tripli partis I in II \square tum.

De-

Demonstratio.

Numerus 16 dividatur ut ante in duas partes 10 & 6,
erit iterum $10 + 6 \propto 16$.

$$\begin{array}{r}
 M \left\{ \begin{array}{l} 10 + 6 \\ 10 + 6 \\ \hline + 1. 10 \text{ in } 6 + 36 \\ 100 + 1. 10 \text{ in } 6 \\ \hline 100 + 2. 10 \text{ in } 6 + 36. \quad \square a 6. \\ 10 + 6 \\ \hline 1000 + 2. \square 10 \text{ in } 6 + 1. 10 \text{ in } \square a 6. \\ + 1. \square 10 \text{ in } 6 + 2. 10 \text{ in } \square a 6 + 216 \\ \hline 1000 + 3. \square 10 \text{ in } 6 + 3. 10 \text{ in } \square a 6 + 216. \text{ Cubus.} \\ \text{A} \qquad \qquad \text{B} \qquad \qquad \text{C} \qquad \qquad \text{D.} \end{array} \right.
 \end{array}$$

Numerus A est cubus partis primæ 10.

B est productum ex triplo Quadrato 1 partis 10
in 2dam 6.

C est productum ex triplo partis primæ in \square tum
2dæ 6.

D est Cubus 2dæ 6.

Ex quibus patet Lemmatis nostri veritas.

Cum jam iterum à priori notum sit hujus Cubi radicem
Cubicam esse $10 + 6$, operatio nostra ita erit instituenda,
ut, (perinde quo modo hoc fiat) ea ipsa Radix $10 + 6$ ex
hoc Cubo eruatur.

$$\begin{array}{cccc}
 \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D.} \\
 \cancel{1000} + 3. \square a \cancel{10} \text{ in } 6 + 3. 10 \text{ in } \square a 6 + \cancel{100} & & & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 10 + 6. \\
 \cancel{1000} & 3 \square a 10. \text{ Divisor.} & & \\
 & \text{O} & \text{P} & \text{Q} \\
 & 3 \square a 10 + 3. 10 \text{ in } \square a 6 + 36 & & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{M} \\
 & & & 6 \\
 + 3 \square a 10 \text{ in } 6 + 3. 10 \text{ in } \square a 6 + \cancel{100} & & &
 \end{array}$$

Primo itaque ex Cubo A ∞ 1000 extraho radicem Cubicam, quæ juxta Tabellam est 10, à latere posita in radice: quæ nota 10 iterum per se ipsam Cubice debet multiplicari, & Cubus 1000 subtrahi à Cubo 1000 quo facto nihil remanebit.

Quia jam videmus in Numero B triplum \square tum numeri 10 (sc. partis primæ radicis inventæ) esse multiplicatum per 6, partem secundam quæsitam, assumo triplum \square primæ notæ 10 pro divisore (quod in omni Extractione Cubica est faciendum,) per quem divisorem partem Cubi B divido, ut acquiratur quotiens 6, quæ est pars secunda Radicis quæsitæ.

Tum separatim post se invicem pono hosce Numeros.

I. Ipsum Divisorem 3. \square a 10, in loco O.

II. Triplum Productum pattis I rad. 10 in partem 2dam 6. sub litera P.

III. Quadratum ejusdem Secundæ partis 6. sub litera Q.

Qui tres numeri per eandem partem secundam 6 multiplicati dabunt eosdem cum superioribus B. C. D., à quibus facta Subtractione remanebit nihil.

Adeo-

De Extract. Rad. Cubicæ.

133

Adeoque erit quæsitæ Radix $\propto 10 + 6$, quæ antea erit nota.

Quia autem nunquam occurrunt Cubi quorum singula membra ita seorsim scripta sunt; ut viam sternamus ad methodum ex illis eruendi Radicem Cubicam, alio etiam modo per multiplicationem alicujus numeri generemus Cubum, ex: gr: Numeri 16.

M		{	1 6	
			1 6	
a		3	6	} O
b		6	.	
c		6	.	
d		1	.	
<hr/>				
e	2	1	6	} P.
f	3	6	.	
g	3	6	.	
h	6	.	.	
<hr/>				
k	3	6	.	} Q
l	6	.	.	
m	6	.	.	
n	.	.	.	
<hr/>				
R	4		0 9 6	
S			T	

In qua multiplicationis forma litera O comprehendit singulas partes \square ti quod fit multiplicando 16 per se ipsum, ut jam in superioribus vidimus, ubi eadem multiplicatio fuit instituta.

Quando jam singula ista membra a. b. c. d. adhuc semel multiplicantur per 16, habebimus ipsius Cubum.

Litera P continet singula membra literæ O multiplicata per 6.

Sc: a per 6 facit e. Cubum ipsius 6.
b per 6 facit f.
c per 6 producit g.
d per 6 facit h.

Litera Q exhibet singula membra ejusdem Literæ O multiplicata per 1 quod est 10.

a per 10. facit k.
b per 10 facit l.

I 3

E per

c per 10 facit m.

d per 10 facit n.

Quæ membra literarum P & Q si in unam summam addantur exhibebunt quæsitum Cubum R.

Si jam multiplicationis membris sic stantibus post tertiam Notam a dextra versus Sinistram ducamus lineam divisionis videbimus Cubum secari in duas sectiones S & T quarum S continet 1 quæ propter quartum locum hic significat 1000. Cubum numeri 10 in radice.

Alterum vero membrum T continet Cubum 216 qui fit a Radice 6.

Ut hinc jam manifesta fiat ratio, quare Cubum ad extrahendum propositum post tertiam quamque notam a dextra sinistorum per lineam in sua membra distinguere oporteat: sc: ut notum fiat quot notas radix quæsitæ habeat: tot nimirum quot membra fiunt in Cubo proposito.

Quæ jam hujusque præmissa fuerunt, puto adeo esse perspicua, ut bene intellecta ipsam extractionis præxim ab omni difficultate liberam præstent: id quod sequentia nos docebunt Exempla.

EXEMPLUM I.

Cubus R.

$$\begin{array}{r|l}
 3 & \\
 \hline
 4 & 096 \\
 \hline
 1 & \\
 \hline
 1 & \\
 \hline
 \end{array}$$

Cubo in sua membra diviso & duabus lineis transversis ductis (quæ radices locum assignabunt) quæro maximum Cubum qui continetur in membro primo (procedendo jam a sinistra a dextram) qui hic est 1, cujus Radicem Cubicam 1. pono in radice intra duas lineas

las;

Tum

Tum primam notam Radicis i cubice multiplico & Cubum scribo infra. sc: 1, quem subtraho a primo membro 4, & remanet 3.

$$\begin{array}{r|l}
 3 & \text{ } \\
 \hline
 1 & 6 \\
 \hline
 3 & \text{ } \\
 \hline
 \text{Divisor.} & 3 \\
 \hline
 3 & \text{ } \\
 \hline
 3 \text{ Z} & 18 \text{ X} & 36 \text{ Y} \\
 \hline
 6 & 6 & 6 \\
 \hline
 18 & 108 & 116 \\
 \hline
 108 & & \\
 \hline
 216 & & \\
 \hline
 3096 \text{ L} & &
 \end{array}$$

Deinde primæ notæ radicis i fumo □tum 1, quod per 3 multiplico, & illud triplum □ti sc: 3, erit mihi Divisor, quem pono proxime post lineam divisionis.

Tum divido 30 per 3. & acquirō quotientem 6 (quia major sumi non poterit) quo facto tres numeros Z. X. Y pono seorsim.

Quorum Z. est ipse divisor, sc: triplum quadrati primæ notæ Radicis. sc: 1.

X triplum producti quod oritur ex prima radice nota 1 ducta in 2dam 6.

Y est quadratum 2dæ notæ 6.

Quos omnes multiplico per eandem secundam Radicis notam 6. & tria illa producta ita addo ut X. ultra Z emineat una nota sc. 8; & deinde Y ultra Y similiter una nota promoveatur, quæ additio dabit Summam L: quam infra Cubum adscribo. & ab eo subtraho: quando nihil remanebit.

Unde concludo Radicem Cubicam quæsitam esse ∞ 16.
qui est idem numerus ex cujus multiplicatione Cubica fuit
ante Cubus generatus.

E X E M P L U M II.

Sit extrahenda Radix Cubica ex 12812904.

~~4~~ | ~~8~~ ~~4~~ ~~8~~ | ~~8~~ ~~8~~ ~~4~~
~~1~~ ~~2~~ | ~~8~~ ~~1~~ ~~2~~ | ~~8~~ ~~8~~ ~~4~~

2 | 3 | 4

~~8~~ | Subtrahendum I.

1 | 2. Div. | 1 mus.

~~4~~ | ~~1~~ ~~8~~ ~~4~~ | Subtrahend. II.

| 1 5 8 | 7 Divisor II.

| ~~8~~ ~~4~~ ~~8~~ | ~~8~~ ~~8~~ ~~4~~. Subtrah. III.

Divis. Tripl. Prod. Quadr. ex 3.
ex 2 in 3.

.....

12 18 9
3 3 3 Nota II.

----- M.

A { 36 54 27
 54.....
 27.....

4167 Summa Subtrah. II.

Quæ Operatio pro
Radice tribus notis
constante hoc modo
procedit.

Primo quæritur
maximus Cubus in
primo membro 12
contentus, qui est
8, cujus radix Cu-
bica ponitur in ra-
dice sc. 2, quæ rur-
sus Cubice in se du-
cta facit 8, ipsi sub-
scriptum, & facta
tum subtractione 8
a 12, manet 4.

Secundo, pro di-
visore I sumo tri-
plum quadrati quod
fit a 2. sc. 12, cujus
nota 2 scribitur post
lineam divisionis,
& quæritur quoties.

Div.

Div. Tripl. Prod. ex Quadr. ex 4.
23 in 4.

	1587	276	16
	4	4	4
	Nota III.		
A {	6348	1104	64
	1104		
	164		
	645904 Subtrahendum III.		

1 in 4, inveniturque secunda Radicis quæsitæ nota.

Qua inventa seorsim ponendi sunt Divisor ∞ 12. Triplum Productum notæ Imæ 2 in Secundam 3 ∞ 18. Et \square ejusdem notæ II ∞ 9, qui omnes tres per eandem Notam

II 3 multiplicandi, & tria producta in unam summam addenda: ita ut secundum una nota emineat ultra primum, & tertium una promoveatur ultra secundum: & tum acquiratur Summa II Subtrahenda à Cubo.

Tertio pro divisore II sumo triplum quadrati quod fit a 23. sc: 1587, cujus nota 7 scribenda rursus post lineam divisionis membri sequentis. & quæritur quoties 1 in 6, acquiriturque 4. tertia Radicis quæsitæ Nota.

Qua jam reperta, iterum seorsim ponenda sunt hæc tria.

1 Divisor ∞ 1587.

2 Triplum productum ex 23 in 4 ∞ 276.

3 Quadratum tertiæ notæ 4 ∞ 16.

Qui omnes numeri per eandem notam tertiam 4 multiplicati dant tria producta. addenda ut semper una Notam super se emineant: & hæc summa est secundo subtrahenda a Cubo: post quam subtractionem cum nihil remaneat, certi esse possumus Radicem quæsitam Cubi propositi esse ∞ 234.

Scholium.

Si in Cubo adhuc unum superfuisset membrum, pro divifore tertio debuiffet sumi triplum \square trium notarum 234. seu totius radice hucusque inventæ: & tum eodem modo debuiffet procedi ut supra.

Et sic porro pro quarto divifore sumendum est triplum \square quatuor notarum, seu potius totius radice eousque inventæ.

E X E M P L U M III.

2	3 3	6 3 6	
1 6 6	1 6 3	6 6 7	
5	4	3	
1 2 8	Subtrah.	I.	
7	5 Div.	I.	
...	
3 2	4 6 4	Subtrah. II.	
...	8 7 4	8 Divisor. II.	
...	
2	6 3 6	6 6 7	
Subtrah. III.			

Ergo radix qua-
sita ∞ 543.

Divi-

Pro Radice Quadrata.

Sit invenienda Radix proxime vera Numeri 2.

Erit $2 \propto \frac{2}{1}$ Fractioni. & utrimque multiplicato per 100.

$$\text{A} \quad 2 \propto \frac{200}{100}$$

_____ & adhuc semel per 100

$$\text{B} \quad 2 \propto \frac{20000}{10000}$$

_____ iterum per 100.

$$\text{C} \quad 2 \propto \frac{2000000}{1000000}$$

Si jam ex Fractionis A Numeratore quantum fieri potest extrahamus Radicem \square tam juxta præcedentia: acquiramus munerum qui cum subscripto numero 10 radice Denominatoris faciet fractionem, quæ ad Veram radicem quæsitam verget, cum aliqua tamen Differentia: quia veram invenire impossibile erit.

Si idem faciamus in fractione B inveniemus fractionem quæ ad veram Radicem impossibilem propius accedet quam præcedens.

Similiter ex tertia Fractione C adhuc propiorem acquiramus: & sic porro in infinitum magis ac magis appropinquabimus ad veram.

Primo itaque extrahatur Radix Quadrata ex fractione A

$$\propto \frac{200}{100}$$

Ex qua

De Extract. Rad. Cubicæ.

141

1		4
2		ø ø.
1		4
2		2 6
		ø.

Ex qua operatione sequitur $1 \frac{4}{10}$
 seu $\frac{14}{10}$ esse radicem quæ ad veram
 vergit: Est autem illa verâ minor, cum
 illius $\square \frac{196}{100}$ distet a 2 hoc est $\frac{200}{100}$
 differentia $\frac{4}{100}$

Ut vero ad veram Radicem adhuc propius accedamus
 sumamus Fractionem B $\infty \frac{20000}{10000}$

		1		
2		ø		1 9
2		ø ø		ø ø
1		4		1
2		2 ø		8 2
		ø 2		ø.
		2		

Et invenimus Radicem
 $1 \frac{41}{1000}$ seu $\frac{141}{1000}$
 quæ veræ adhuc magis pro-
 pinqua est quam præcedens.
 Est autem iterum vera mi-
 nor. Cum illius $\square \frac{19881}{10000}$
 distet a 2 id est $\frac{20000}{10000}$ in-

tervallo $\frac{119}{10000}$

Est præterea secunda hæc
 differentia minor prima. sc:

$\frac{119}{10000}$ est minor $\frac{4}{100}$

id est $\frac{400}{10000}$

Sj

Si deinde ad veram Radicem adhuc propius accedere libuerit, sumatur Fractio C.

	1	16	
1	4	1 8	0 4
2	8 8	2 8	8 8
1		1	4
1	2 6	8 1	2 6
	8 2	8 8	8
	2 2	2 2	
	1 1	1	

Invenitur Radix 1 $\frac{414}{10000}$

sed $\frac{1414}{10000}$. Cujus Qua-

dratum $\frac{1999396}{1000000}$ 2 2

hoc est $\frac{2000000}{1000000}$ per

$\frac{604}{200000}$.

Est autem tertia hæc Differentia $\frac{604}{1000000}$ iterum,

minor quam secunda $\frac{119}{10000}$ hoc est $\frac{11900}{1000000}$.

Adeoque tertia hæc Radix a vera minus deficiet quam secunda.

Quod si majorem accurationem desideremus¹, ultimam hanc fractionem rursus multiplicando per 100. aut 10000 aut 1000000. & radicem porro extrahendo in infinitum propius ad Veram radicem appropinquabimus,

Numquam tamen veram inveniemus; cum nullus detur Numerus sive integer, sive fractus qui per se ipsum multiplicatus producat 2.

Pro Radice Pubica.

Sit Radix Cubica extrahenda ex Numero 3.

Erit $3 \propto \frac{3}{1}$ Fractioni, quæ si utrinque multiplicetur
per 1000.

$$A \quad 3 \propto \frac{3000}{1000.}$$

adhuc semel per 1000.

$$B \quad 3 \propto \frac{3000000}{1000000.}$$

iterum per 1000.

$$C \quad 3 \propto \frac{3000000000}{1000000000.}$$

Si jam ex Fractionis A Numeratore quantum fieri potest etiam juxta præcedentia Radicem Cubicam, inveniatur numerus qui cum numero 10 Denominatoris Radice Cubica, faciet fractionem ad Veram radicem vergentem.

Quod si idem faciamus in fractione B, inveniemus radicem adhuc magis vergentem ad veram impossibilem.

Propius autem accedemus si quæremus radicem Cubicæ fractionis C.

Primo itaque extrahatur Radix Cubica ex Fractione

$$A \propto \frac{3000}{1000.}$$

\neq	256	Div.	Trip. prod.	\square ex 4.
\neq	$\phi\phi\phi$		ex 1 in 4.	
1	4	3	12	16
\neq				4 M.
Divisor	3	A {	¹² 48	64.
\neq	$\neq\neq\neq$		64.	
			1744	

Qua operatione peracta sequitur $1\frac{4}{10}$ s. $\frac{14}{10}$ esse radicem quæ ad veram vergit, qua tamen minor est. cum illius Cubus $\frac{2744}{1000}$ differat a 3 id est $\frac{3000}{1000}$ per $\frac{256}{1000}$.

Si jam sumatur fractio secunda B, & extrahatur Radix Cubica propius ad veram Radicem accedemus.

	\neq	\neq	\neq	4	0	1	6
	\neq	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ
	1		4		4		
Subtrah. I.	\neq						
Divisor I.		3					
	\neq	\neq	\neq				
Divisor I I.			5	8	8		
Subtrah. I I.		\neq	\neq	\neq	ϕ	\neq	\neq

Divis.

De Extract. Rad. Cubicæ. 145

Divisor. Tripl. prod. Quadr. ex 4.
ex 14 in 4.

588	168	16 } M, 4 }
2352	672	64
672		
64		
241984		

Ubi acquiritur Radix $\frac{144}{100}$, cujus Cubus $\frac{2985984}{1000000}$

differt a 3 hoc est $\frac{3000000}{1000000}$ per differentiam $\frac{14016}{1000000}$

quæ minor est priori differentia $\frac{256}{1000}$ hoc est $\frac{256000}{1000000}$.

Adeoquæ hæc radix priori veræ est prior.

Si autem ad veram adhuc magis accedere velimus, sumamus Fractionem C.

	11		Divis.	Trip. Prod.	Quadr.
	14	557		ex 144. in 2.	ex 2.
2	288	818	62208	864	4. } M 2. }
3	888	888			
1	4	4	124416	1728	8
Subtrah. I.	—	—	1728		
Divis. I.	3	—			8.
Subtrah. II.	141	884	12458888		
Divis. II.	6	2208			
	12	888888			

K

Ex

146 Pars I. Cap. XV. De Extr. Rad. Cub.

Ex qua Operatione invenitur Radix $1 \frac{442}{1000}$ seu

$\frac{1442}{1000}$, cujus Cubus $\frac{2998442888}{1000000000}$ differt a 3 id est

$\frac{3000000000}{1000000000}$ differentia $\frac{1557112}{1000000000}$ quæ est minor

præced. $\frac{14016}{1000000}$ hoc est $\frac{14016000}{1000000000}$. Adeo-

que hæc radix ad veram propius accedit quam præcedens.

Quod si accuratior adhuc desideretur approximatio, poterimus ultimam hanc fractionem utrinque ulterius per 1000, aut 1000000, aut 1000000000, & tum Radicem Cubicam extrahere, & sic licebit in infinitum ad veram accedere Radicem.

Cum autem Radicum Extractio per universam Mathematicam insignem habeat usum, illæque ex plurimis numeris magno cum laboris & temporis dispendio erui debeant; visum fuit in fine hujus Operis Tabulam Quadratorum adjungere ascendentem a Radice 1 usque ad 3000, Ut & Cuborum ab 1 usque ad 1500.

ARITHMETICÆ

P A R S II.

*Complectens vulgo sic dictas Regulas
Arithmeticas.*

C A P U T I.

Continens Definitiones.

Hucusque numeros tantum in se ipsis & absolute consideravimus, nihil aliud quærentes, quam Numerorum datorum Summam aut differentiam, aut alicujus numeri multipulum: Quorum Primum absolvitur Additione: Secundum Subtractione peragitur, Tertium vero Multiplicationem constituit.

Nunc ordo requirit, ut spectemus quomodo duo aut plures numeri ad se invicem comparari possint; & quam relationem respectu majoris vel minoris multitudinis ad se invicem habeant.

Quæ relatio cum à Mathematicis Rationis nomine indigitetur & Rationis natura per divisionem innotescat, eadem illa Divisionis species aliquo modo ad rationum doctrinam pertinebit: sine cujus tamen mentione commodè satis tractari potest, uti nos in præcedentibus fecimus, ubi ne minima quidem Rationis occurrit denominatio.

Ut autem hujus Rationis & inde fluentis Proportionis natura, (sine qua ne minimam quidem quæstionem de rebus ad usum humanæ vitæ institutam fere resolvere licet) manifesta fiat, haud abs re fore duximus, præmittere quasdam Definitiones, Axiomata, & Theoremata; ut istis præparatoriis muniti securius & proniori via ad Regularum Theoriam & Praxin transire possimus.

DEFINITIO I.

Ratio est duarum quantitatum ejusdem generis mutua quædam secundum communem mensuram habitudo: & habet locum inter tales res, quæ possunt multiplicatæ se mutuo superare.

Si unam & eandem rem in se ipsa spectamus, proprie loquendo illa ad se ipsam nullam rationem aut relationem potest dici habere, quia illa sibi ipsi æqualis, seipsa nec major nec minor est.

Hinc sequitur plures res requiri, ut justam possimus instituere comparisonem, quæ tamen tantum duæ possunt esse; nam si plures proponantur quam duæ, Ex. gr. quatuor. A. B. C. D, inter illas tot diversæ dantur rationes, quoties binæ ac binæ diversæ possunt conjungi.

Præterea requiritur ut istæ duæ res sint homogeneæ, ejusdem generis, vel plerumque commodius etiam ejusdem speciei, & naturæ; sic inter res spirituales & corporeas nulla intercedit ratio, quia non sunt ejusdem generis, sed habent naturam ab omni parte contrariam. Non enim possumus dicere Spiritum esse majorem vel minorem domo: quia ratio proprie respicit vel majorem vel minorem magnitudinem in quantitibus continuis, vel majorem vel minorem multitudinem in quantitibus discretis, hoc est, in numeris.

Deinde definitio vult ut istæ quantitates duæ habeant communem mensuram : hoc est , ut possit inveniri aliquid, quod aliquoties continetur in una re, ita ut etiam aliquot vltibus contineatur in altera.

Ultimò dicitur rationem locum habere inter tales res, quæ possunt multiplicatæ se invicem superare. hoc est quæ ita sunt constitutæ , ut illa res quæ prius fuit minor , per sæpius factam multiplicationem sic possit augeri, ut postea fiat major altera , qua prius minor fuit.

Quæ omnia si applicentur Numeris statim patebit inter illos omnes intercedere rationem.

I. Quia omnes sunt res homogeneæ & ejusdem naturæ.

II. Quia omnes habent communem mensuram ; sc. unitas metitur & dividit omnes numeros : quare etiam omnes sunt ejusdem denominationis : quia omnes respiciunt communem suum divisorem sc. unitatem. Sic quando dico 4. intelligo 4 Unitates : si dico 6 intelligo 6 unitates.

III. Quia possunt multiplicatæ se mutuo superare : sic quando comparatur 1 ad 12 , potest 1 sic augeri per multiplicationem ut fiat major quam 12.

Unde patet inter quosvis duos Numeros dari rationem.

In quibus quia unus terminus ad alium comparatur , ille qui ad alium refertur dicitur Terminus Antecedens : alter vero ad quem prior refertur dicitur Terminus Consequens Rationis.

Sic si 4 referatur ad 12. Erit 4 Antecedens & 12 Consequens rationis quam habet 4 ad 12.

E contra erit 12 Antecedens & 4 Consequens rationis quam habet 12. ad 4.

Intelligenda autem est illa ratio in numeris secundum multitudinem, seu partium æqualium Numerum, adeo ut unus numerus sit altero vel major vel minor, hoc est ut

unus plures vel pauciores similis seu æquales contineat partes quam alter.

Sic duo numeri 12 & 4. possunt dividi per eandem mensuram seu per communem divisorem 2, & acquiruntur 6 & 2, qui iterum per 2 possunt dividi, ut veniant 3 & 1. hinc jam concludo habere se 12 ad 4, ut 6 ad 2, & ut 3 ad 1.

Quia autem 12 & 4 se invicem dividere possunt, & 4 dividente 12 invenitur quotiens 3. seu 3 unitates, non opus est considerare communem divisorem 2: & statim pronuncio istam rationem quam habet 12 ad 4 esse triplam: quia 4 ter continetur in 12.

Ex quibus patet rationem nihil aliud esse quam modum seu formulam continendi qua Antecedens rationis suum Consequentem continet vel in illo continetur.

Cum autem hæc capacitas vel continendi formula per nullam aliam operationem innotescat quam per divisionem, liquet Rationem duorum numirorum non clarius quam per fractionis formam posse exprimi.

Sumamus Ex. Gr. duos numeros 12 & 6, inter quos aliqua reperitur ratio, quia numerus 12 est major quam 6, adeoque ille hunc in se continet,

Quam rationem autem in specie duo isti numeri inter se habeant, per divisionem nobis possumus reddere notum, examinando sc. quoties 6 contineatur in 12: & sic dividendo acquirimus quotientem 2, unde patet rationem 12 ad 6 esse duplam, hoc est 12 esse duplum 6, vel 12 se habere ad 6 ut 2 ad 1.

Quia autem divisionis forma etiam potest satis commodè designari in modum fractionis ponendo dividendum supra divisorem cum interjecta lineola: etiam ratio quam 12 ha-

habet ad 6, non minus apte hoc modo exprimitur $\frac{12}{6}$, id quod innuit 12 per 6 esse dividendum vel jam esse divisum.

D E F I N I T I O II.

Proportio est Rationum Similitudo.

Quemadmodum in omni ratione requiruntur duo termini, sic: Antecedens & Consequens, ita in omni proportionem exiguntur duæ Rationes; sicuti enim una & eadem res ad se ipsam proprie loquendo non potest habere rationem; ita quoque una & eadem ratio non potest dici sibi ipsi similis; ita ut ista similitudo necessarie secundam dicat rationem, cui prima sit similis.

Proportionis autem Naturam hoc modo clare percipere licet.

Cum duarum rationum una ita sit constituta, ut illius Antecedens suum Consequentem toties contineat vel in illo contineatur sive absolute & sine residuo sive cum annexa fractione, quoties alterius Rationis Antecedens suum Consequentem continet vel in illo continetur, vel sive vel cum fractione, quæ præcedenti æqualis est: Tum duæ istæ rationes constituent Proportionem.

Sic quia Rationis 12 ad 6, Antecedens 12 suum consequentem 6 toties (scilicet bis) continet, quoties Rationis 8 ad 4 Antecedens 8 suum Consequentem 4, (sc: etiam bis.)

Duæ istæ rationes 12 ad 6, & 8 ad 4, erunt inter se similes, vel æquales seu potius eadem sc: duplæ.

Et hæc similitudo vocatur Proportio.

Similiter in Rationibus, quarum quotientibus annexa est fractio, res eodem modo sese habet.

Sic Rationis 12 ad 9 Antecedens 12 Consequentem 9
 continet semel cum una tertia parte (quod exprimitur per
 quotientem $1\frac{3}{9}$ id est $1\frac{1}{3}$): Et quia rationis 4 ad 3
 Antecedens 4 suum Consequentem 3 toties etiam continet
 sci: semel cum una tertia parte Duæ istæ rationes 12 ad
 9 & 4 ad 3 erunt inter se iterum similes vel æquales.

DEFINITIO III.

Eandem vel similem rationem habentes quatuor Num-
 meri dicuntur Proportionales.

Sic quatuor proportionales sunt 12 \sim 6=8|4.

Ut etiam hi quatuor 12 \sim 9=4|3.

Lemma.

Multiplicatio nihil est aliud quam multiplex & com-
 pendiosa Additio.

Ut &

Divisio nihil aliud quam multiplex & compendiosa Sub-
 tractio.

Demonstratio Partis I.

Si proponatur 8 multiplicandus per 4, idem erit ac si
 imperetur ut 8 toties sibi addatur quoties 1 continetur in
 4, sic: quater.

Adeoque.

$$\begin{array}{r} 8. \\ 8. \\ 8. \\ 8. \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 8. \\ 8. \\ 8. \\ 8. \end{array}} \right\} A.$$

$\overline{32.} \propto 8$ mult. per 4.

Demonstratio Partis I I.

Sit propositus numerus 16 dividendus per 2; quando imperatur inquirendum quoties 2 contineatur in 16, & invenimus quotientem 8, qui indicat 2 octies contineri in 16.

Potest autem idem quæsitum inveniri, quando 2 a 16 aufertur quoties fieri potest; comperiemus autem istam subtractionem octies posse fieri, sc: toties quot unitates in quotiente divisionis continentur.

$\begin{array}{r} 16 \text{ S} \\ 2 \\ \hline 14 \text{ S} \\ 2 \\ \hline 12. \end{array}$	$\begin{array}{r} 12 \text{ S} \\ 2 \\ \hline 10 \text{ S} \\ 2 \\ \hline 8. \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \text{ S} \\ 2 \\ \hline 6 \text{ S} \\ 2 \\ \hline 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4 \text{ S} \\ 2 \\ \hline 6 \text{ S} \\ 2 \\ \hline 0. \end{array}$
--	---	--	---

Quia autem divisio hoc idem brevius peragit. quod Subtractio majori circuitu; clarum est Divisionem revera esse compendiosam Subtractionem.

Lemma I I.

Si duo æquales Numeri per eundem numerum vel æquales multiplicentur, Producta erunt æqualia.

Si vero per eundem Numerum dividantur, quotientes erunt æquales.

Id quod ex se ipso satis patet.

Theorema.

Si quatuor quantitates sint proportionales. Productum, quod oritur ex Multiplicatione extremarum est æquale Producto Multiplicationis Mediarum.

Demonstratio.

Sint quatuor Numeri proportionales.

$$16 \sim 4 = 8 | 2.$$

Ratio 16 ad 4 eadem est juxta præcedentia cum fractione $\frac{16}{4}$ ut & Ratio 8 ad 2 eadem cum fractione $\frac{8}{2}$. Et quia istæ rationes sunt æquales erunt quoque & fractiones æquales.

Adeoque.

$$\begin{array}{r} \frac{16}{4} \propto \frac{8}{2} \\ \hline 16 \propto 4 \text{ in } 8 \\ \quad 2. \end{array}$$

Mult.utrinque per 4. Eritque per Lemma II.

Mult.utrinque iterum per 2. per Lemma II.

Hoc est productum extremarum 16 & 2 in se invicem ductarum æquale producto mediarum 4 & 8 itidem per se invicem multiplicatarum.

Q. E. D.

CAPUT II.

*De Regula de Tribus, qua etiam dicitur Regula
Proportionis & Aurea simplex directa.*

Licet id omne quod in Arithmetiis efficitur tantum per Additionem & Subtractionem peragatur, aut earum contractas operationes Multiplicationem sci: & divisionem; non tamen istis operationum speciebus recte perceptis omnia sese nostræ cognitioni subjiciunt quæ calculo præstari possunt Arithmetico, nisi accedat iusta numerorum ordinatio, præsertim in quæstionibus magis compositis, quam illæ circa quas hucusque occupati fuimus; quippe in quibus plures dati sunt numeri, ex quibus sive multiplicando compositis sive subtrahendo sejunctis alius eliciatur numerus, qui nobis antea erat ignotus; Id quod nobis maxime usu venit in talibus quæstionibus quæ nobis primo intuitu parum intricatiores videntur esse; ubi absque legitima Numerorum collocatione nullum omnino exitum reperire licet.

Ut autem nos ex talibus difficultatibus nullo negotio expediamus Regulæ inventæ sunt, quæ nobis viam monstrant, juxta quam secure procedere possimus, & ex intricata quarundam quæstionum obscuritate lucem eruere.

Harum autem Prima est Regula de Tribus, nos docens invenire Numerum, qui ad alium seu ad quem alius eam habeat rationem quam habet Numerus datus ad Numerum datum.

Unde patet hinc in finem necessario requiri tres numeros datos, quorum duo exprimant rationem datam, &

tertium, cui quæritur quartus, qui cum tertio eandem exprimat ratioem, quam habent priores dati duo.

Quare etiam hæc regula dicitur Proportionis, quia sci: tribus datis quartum quærit Proportionalem.

Vel etiam non raro venit nomine Regulæ Aureæ, ob insignem quem in tota Mathesi non tantum, sed in omnibus fere humani commercii partibus præstat usum.

In quæstionibus autem practicis, quæ sci: ad usus humanos pertinent, ex tribus Numeris datis semper duo sunt homogenei, hoc est de eadem re inter se, quorum unus annexam habet quæstionem.

E X E M P L U M

Sic cum dico, 60 aureos expendo 5 mensibus; quot ergo mensibus expendam aureos 254.

Numeri Homogenei sive de eadem re sunt 60 aurei & 254 aurei. quorum posteriori alligata est quæstio.

Is igitur numerus qui annexam habet quæstionem tertio ponatur loco, alter de eadem re loco primo assignetur; reliquum vero qui solitarius est & homogeneus quarto incognito, ponatur loco medio.

Si jam sit ut Primus \sim ad Tertium \equiv ita 2dus / ad 4tum quæsitum hoc est si quanto primus major est vel minor tertio, tanto etiam secundus sit major vel minor quarto quæsito, Regula quæ tum solvendæ quæstioni adhibebitur Regula Proportionum directæ dicitur.

Ut autem pateat, quomodo numeris jam dispositis hac in Regula procedendum sit, consideremus A. B. C. esse tres numeros datos, quibus quæritur quartus Proportionalis, dictus Q.

Per

I.	II	III	IV.
A	B	C.	/ Q.
A in Q	\propto	B in C.	
Utrunque dividendo per A.			
Erit Q \propto B in C.			
A.			

Per Theorema erit productum A in Q extremarum, æ quale producto mediarum B in C.

Quæ producta æqualia si per eandem A dividantur, erit per Lemma 2.

$$Q \propto B \text{ in } C$$

A.

Unde deducitur talis.

Regula.

Multiplica Secundum & Tertium, sc: B & C, per se invicem, & productum divide per Primum A, Quotiens siue Integer ille sit, siue integer cum fracto erit quartus proportionalis quæsitus.

E X E M P L U M I.

Si 3 pondo mercium constant 5 Solidis; tum 15 mercium pondo quot florenis constabunt?

Numerus cum quæstione est pondo 15, qui ponatur loco terrio.

Numerus illi homogeneus est pondo 3, qui collocetur loco primo.

Numerus autem solitarius & quæsito homogeneus est 5 Solidi. qui ponatur in medio.

Quo observato Numeri sic stabunt.

Pondo

Pondo	Solidi	Pondo.	
3 A.	15 B	5 C	Q
	B 15 C 5 } M.		
	B in C 75. A 3 } D		
	B in C ∞ 25.	Numerus quæsitus Q.	
A			

Examen & Probatio.

Hoc deducitur ex nostro Theoremate.

Multiplica Numerum Primum & Quartum inventum per se invicem, Ut & secundum & Tertium: Si duo illa producta sint inter se æqualia: absque errore peracta est operatio: Si vero sint inæqualia male operati sumus.

Ut in præcedenti Exem-	A	B	C	Q
plo A multiplicatvm per Q	3	15	5	25
producit E, Similiter B per
C multiplicatum producit	.	.	75	E
idem E, quæ identitas legiti-
mæ operationis certifi-	.	.	75	E
cium nobis suppeditat indi-				
cium.				

Alii vero, ut examen instituant, totam quæstionem invertunt, assumendo numerum antea quæsitum inter data quæstionis, & numerum ipsi homogeneum pro quæsito.

Sic sc: præcedentem quæstionem proponunt.

Si

De Regula de Tribus.

159

Si 5 pondo mercium constant 25 Solidis Ergo 3 pondo quot solidis constabunt.

Cujus solutione si pro numero quarto incognito inveniatur 15, idem sc: qui antea erat datus; prior resolutio erit proba & legitima.

Pondo

$$\begin{array}{r} 5 \sim 25 = 3 \mid \\ \frac{3}{75} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{15} \\ \text{15} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{15} \\ \text{15} \end{array}} \right\} 15 \text{ quartus quæsitus.}$$

EXEMPLUM II.

Intra 4 menses expenduntur nummi 400; Ergo intra 12 menses quot nummi expenduntur.

Termini sic disponantur

Menses.		Nummi		Menses.
4	\sim	400	$=$	12
		12		
		400		
		<hr/> 4800		

$\begin{array}{l} \text{1200} \\ \text{1200} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{1200 Numerus num-} \\ \text{morum quæsitus.} \end{array} \right.$

EXEMPLUM III.

Si 18 ulnæ consent 10 flor. 12 stuferis, quanti constabit 1 ulna. In hac quæstione numerus cum quæstione est 1, qui in 3^o loco ponendus. Ipsi homogeneus est 18 ulnæ, ponendus primo loco.

Solitarius est 10 flor. 12 stuf., qui in medio poni debet: ita tamen ut floreni reducantur ad stuferos, & ipsis 12 stuferi addantur.

Ut

10

20.

fet.

Ut idem sit ac si quaestio es-

200

12

'Si 18 ulnæ constant. 212 stufferis,
A. 1 ulna quot stufferis emetur.

212. *Stuferi.*

Quæ hoc modo resolvitur.

Ulnæ

stuf :

Ulnæ.

Auf:

18

212

I

venit $11\frac{7}{9} \int$. 11. stuf:

1

五

22

188

I

84

I

•

$12 \frac{4}{9}$ denar :

$$11 \frac{14}{18} \int : 11 \frac{7}{9} \text{ auf:}$$

Quæ fractio ut redu-
catur ad denarios mul-
tiplicetur 7 per 16,
& productum 112 di-
vidatur per 9.

214

1112

۲۲۲

"

12 $\frac{4}{9}$ denarii

Adeoque una ulna constabit

11 stuf: 12 $\frac{4}{9}$ -denariis.

E X E M P L V M IV.

Si 4 pondo & 3 unciae constent 5 flor: 12 stuf: quanto
constabunt pondo 100.

De Regula de Tribus, &c. 161

Termini sic ponendi sunt.

Pondo	uncia	flor:	stuf:	Pondo.
4	—	3	—	5
16			12	100
64			20	16
3			100	1600 uncia.
			12	
67.	Uncia.	112.	stuf:	

Quæstio itaque sic mutabitur.

Uncia. stuf:

$$67 \sim 112 = 1600.$$

$$\begin{array}{r} 1600 \\ 67200 \\ 112. \\ \hline 179200 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 133 \overline{) 4} \\ 133 \overline{) 12} \\ 133 \overline{) 20} \\ 133 \overline{) 100} \\ 133 \overline{) 1600} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 133 \overline{) 4} \\ 133 \overline{) 12} \\ 133 \overline{) 20} \\ 133 \overline{) 100} \\ 133 \overline{) 1600} \end{array}} \right\} 2674 \frac{42}{67} \text{ stuf:}$$

Qui stufieri ad florenos 133
reducti dabunt 133 flor:

$$14 \frac{42}{67} \text{ stuf:}$$

EXEMPLUM V.

Si 24 flor. 8 stuf. 12 den. emanantur pondo 100, & 4 uncia. quæritur 400 fl. 12 st. 6 den. quot pondo debeant emi.

Termini dati sic stabunt.

flor.	stuf.	den.	ss	unciaz	flor.	stuf.	den.		
24	—	8	—	12	400	—	12	—	6.
20,	.	.	.	16	20
<u>480</u>	.	.	.	<u>1600</u>	<u>8000</u>
8	.	.	.	4	12
<u>488</u>	.	.	.	<u>1604</u>	<u>8012</u>
16	.	.	.		16
<u>2928</u>	.	.	.		<u>48072</u>
488	.	.	.		8012
<u>7808</u>	.	.	.		<u>128192</u>
12	.	.	.		6.
<u>7820</u>	.	.	.		<u>128198</u>
Donarii									

Post quam reductionem numeri dati hoc modo se habebunt

Denariis Emuntur Unciaz Denariis

$$\begin{array}{r}
 7820 \quad \sim \quad 1604 \quad \overline{M} \left\{ \begin{array}{l} 128198 \\ .1604. \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{Quot Un-} \\ \text{ciaz,} \end{array} \right. \\
 \hline
 512792 \\
 7691880 \\
 12819800 \\
 \hline
 205629592
 \end{array}$$

Si jam hoc productum.

205629592 dividatur per numerum 7820, pro quo-

ciente acquireretur 26294 $\frac{512}{7820}$ Unciaz.

Quae si reducantur ad pondera (quod sit dividendo per

Termini dati sic stabunt.

flor.	fluf. deu.	ss	uncia	flor.	fluf. deu.
24 —	8 —	12	100 — 4 —	400 —	12 — 6.
20,	.	.	16	20	.
480	.	.	1600	8000	.
8	.	.	4	12	.
488	.	.	1604	8012	.
16	.	.		16	.
2928	.	.		48072	.
488	.	.		8012	.
7808	.	.		128192	.
12	.	.		6	.
7820 Denarii				128198	

Post quam reductionem numeri dati hoc modo se habebunt

Denariis Emuntur Unciæ Denariis

$$\begin{array}{r}
 7820 \quad \sim \quad 1604 \quad \overline{M} \left\{ \begin{array}{l} 128198 \\ .1604. \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Quot Un-} \\ \text{ciæ,} \end{array} \\
 \hline
 512792 \\
 7691880 \\
 128198 \dots \\
 \hline
 205629592.
 \end{array}$$

Si jam hoc productum.

205629592 dividatur per numerum 7820, pro quo-

tiente acquireretur $26294 \frac{512}{7820}$ Unciæ.

Quæ si reducantur ad pondera (quod sit dividendo per

163

$$\begin{array}{r} 512 \\ \hline 7820 \end{array}$$

VI.

bunt 32. 00.

Operatio sic procedit.

fl. stuf. den.

9 ~ 6 = 12 - 4 = 32.

120

120

12

132

16

792

132

2112

4.

2146

• 2116

• 32

• 4232

6348.

67712

:

•

•

44315

カカイ

●●●●

3

48

78

• 22 •

● ●

875

●●●

11

4

44

3

$$\left. \begin{array}{l} 7523 \\ 5 \\ 9 \end{array} \right\} \text{den.}$$

3

47 | o. stu-
fer. 3 $\frac{5}{9}$ D.

23-A.

10 stuf.

3-Den.

2

L 2

Note

Nota.

In Exemplis sequentibus inter numeros datos etiam reperiuntur fractiones, sive solæ sive integris annexæ. Dispositio autem terminorum & operatio cum præcedentibus omnino est eadem.

E X E M P L U M V I I.

Si $\frac{1}{2}$ ~~88~~ constat $\frac{3}{4}$ flor. quanti constabit $\frac{7}{8}$.

88

 $\frac{1}{2}$

~

 $\frac{3}{4}$ $= \frac{7}{8}$ $\frac{3}{4} M \frac{7}{8}$ $\frac{21}{32} D.$ $\frac{42}{32}$ $\frac{10}{32}$ $\frac{5}{16}$

E X E M P L U M V I I I.

Si $5 \frac{1}{2}$ Ulnæ constant $8 \frac{1}{3}$ flor. quanti constabunt $\frac{5}{8}$ Ulnæ.

Ulnæ flor.

 $3 \frac{1}{2}$

~

 $8 \frac{1}{3} = \frac{5}{8}$

Multiplica 2dum & 3tium

 $\frac{125}{24} Div. per \frac{7}{2}$ Quotiens $\frac{250}{168} \propto 1 \frac{82}{16} \propto 1 \frac{41}{84}$

EXEM-

EXEMPLUM IX.

Si $2\frac{1}{2}$ ℥ emantur 7 stuf. $8\frac{1}{8}$ den. quanti ementur.

500 ℥ .

℥	stuf.	den.	℥
$2\frac{1}{2}$	7	$8\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4} = 500$
<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/>
5	16	:	2.
<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/>
2	112	:	1000
	8. } A.	:	2.
	<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/>
	120	:	:
	4 } M.	:	:
	<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/>
	480	:	:
	4 } A	:	:
	<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/>
	1	:	:
	<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/>
	4.	:	:
	<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/>
	481	M: per $\frac{1000}{2}$:
	<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/>
	4.	2	:

Productum $\frac{481000}{8}$ Divide per $\frac{5}{2}$.

Quotiens $\frac{96200}{4} \infty 24050$ denarii.

Qui per 16 reducti ad stuferos, dabunt 1503 stuf. 2 denarios.

Et stuferi reducti ad flor. facient 75. fl. 3. stuf. 2 denarios pro numero quæsito.

EXEMPLUM X.

Hoc est inversum præcedentis IX. adeoque & ipsius Probatio.

Si 500 ℥ vendantur 75 flor. 3 stuf. 2. den. quanti vendebent $2\frac{1}{2}$ ℥ ..

℥	flor.	stuf.	Den	β .
500	75	3	2	$2\frac{1}{2}$
$\frac{2}{2}$	$\frac{20}{20}$.	.	$\frac{2}{2}$.
1000.	1500	.	.	5
$\frac{2}{2}$	3.	$\frac{5}{2}$.
	1503 } M.	.	.	.
	16 }	.	.	.
	9018	.	.	.
	1503	.	.	.
	24048 } A.	.	.	.
	2	.	.	.
	24050. M. per $\frac{5}{2}$.			
	120250	Div. per $\frac{1000}{2}$		
	veniunt 120 $\frac{25}{100}$ seu $120\frac{1}{4}$ Denarii.			

Qui denarii si per 16 ad stuferos reducantur veniet 7 stuf. 8 $\frac{1}{4}$ den. Idem numerus cum secundo præcedentis Exempli, qui requirebatur.

EXEM-

E X E M P L U M X I.

Quod est inversum Exempli VI: adeoque illius sup-
editat Examen.

Si 32 ℥ constant 32 fl. 10 stuf. $3\frac{5}{9}$ Denariis: quanti
ementur 9 ℥ .

℥	fl.	stuf.	Den.	℥
32	\sim	$\{ \begin{array}{l} 23 \\ 20 \end{array} \}$	$\begin{array}{r} 10 \\ 3\frac{5}{9} \\ \hline 9 \end{array}$	$\begin{array}{r} 9 \\ \hline 9 \end{array}$
		$\frac{460}{10 \dots}$	$\frac{32}{9} \text{ Den.}$	
	$\begin{array}{r} 470 \text{ stuf.} \\ 16 \end{array}$		$\begin{array}{r} 333 \\ 37712 \\ 37712 \\ 333 \\ 34 \\ 32 \\ 32 \\ 132 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2116 \text{ Denarii.} \\ \text{Qui per 16} \\ \text{divisi faciunt} \\ 132 \frac{1}{4} \text{ stu-} \\ \text{feros.} \end{array}$
	$\begin{array}{r} 2820 \\ 470 \end{array}$			
	$\begin{array}{r} 7520 \text{ denarii} \\ 9 \end{array}$			
	$\begin{array}{r} 67680 \\ 9 \end{array}$			
	$\begin{array}{r} 32 \end{array}$	$\} \text{A.}$		
	$\begin{array}{r} 67712 \text{ Denarii} \\ 9 \end{array}$			
	$\begin{array}{r} 67712 \end{array}$			

Scholium.

Haud parum in compendium redigetur operatio si sequens observetur

Regula.

Numerum primum & secundum, seu Numerum primum & tertium, per communem aliquem numerum vel divide vel multiplica: & quotientibus vel productis in locum numerorum datorum suppositis, operare juxta præscriptum Regulæ Generale; & obtinebitur Numerus quæsitus.

Exemplum I. per Divisionem.

Si 4 homines consumant 20 florenos; quot florenos consumant 12 homines.

Juxta Regulam Generalem.

Hom. flor. Hom.

4. ~~~~~ 20 = 12.

$$D \left\{ \begin{array}{c} \overline{20} \\ 4 \quad 5 \quad 6 \\ \quad \quad \quad \end{array} \right\} 60 \text{ numerus quæsitus.}$$

Compendii modus I.

$$4) \begin{array}{r} 4 \sim 20 = 12. \\ 1 \quad 5 \quad 5 \end{array}$$

60. ut requiritur.

Terminos primum
& secundum 4 & 20
divide per commu-
nem divisorem 4, &
veniunt quotientes 1

& 5, quibus in locum priorum substitutis, per Regulam
generalem hoc Exemplum absque principali divisore per-
agetur. Quod ope hujus Compendii sæpissime contin-
git.

Exemplum II. per Divisionem.

Si 125 ulnæ vendantur 500 florenis; quot florenis con-
stabunt 600 ulnæ?

Juxta Regulam Generalem.

Ulnæ 1

$$125 \sim 500 = 600$$

$$D \left\{ \begin{array}{r} 500 \\ 300000 \\ 125 \end{array} \right\} \text{venit numerus} \\ \text{quæsitus 2400.}$$

Compendii modus II.

25)

$$125 \sim 500 = 400$$

5

24

500

2

12000

12000

25

24000 ut ante.

Terminos primum & terti-
um sc. 125 & 600 divide per
communem divisorem 25, &
quotientes 5 & 24 in illorum
substitue locum; & tum ope-
rare ut vulgo fieri solet.

L 5

Com-

Compendii modus III.

$$\begin{array}{r}
 25) \quad 125 \quad \text{---} \quad 500 \quad \text{---} \quad 600. \\
 5) \quad 5 \quad \text{---} \quad 100. \quad 24. \\
 \quad \quad 1 \quad \text{---} \quad 100.
 \end{array}$$

Primo ut in modo secundo factum est divide per 25. Deinde primum terminum 5 & secundum 500. divide per communem divisorem 5, & acquirentur quo-

tientes 1 & 100, quorum ultimus multiplicatus per 24 dabit Numerum quæsitum quæsitum 2400 ut ante.

Notandum autem quo Numeri dati sint majores, eo etiam majorem hujus compendii colligi fructum: cum ibi loco prolixioris multiplicationis sæpissime brevior substituitur: præterquam quod non raro tota evanescat divisio: ut ex prioribus patet.

Exemplum I. per Multiplicationem.

Hæc locum habet in fractionibus.

Si $2\frac{2}{3}$ ℥ consistant 5 florens, Ergo 4 ℥ quot flor. constabunt.

Compendii modus I.

$$3) \quad \frac{2\frac{2}{3}}{8} \quad \text{---} \quad 5 = 4 \quad \left| \quad \frac{60}{8} \propto 7\frac{4}{8} \propto 7\frac{1}{2} \quad \text{Numerus quæsitus.}$$

Primum terminum $2\frac{2}{3}$ & secundum 5 multiplica per denominatorem 3 , & producta 8 & 15 , in locum priorum substitue: & tum operare modo generali.

Compendii modus II.

3)

$$2\frac{2}{3} \sim 5 = 4.$$

$$\frac{2}{3} \quad \frac{5}{12}$$

$$\frac{5}{8} \quad D \frac{60}{8} \approx 7\frac{1}{2}$$

Primum & III terminum multiplica per denom. 3 , & quotientes 8 & 12 loco priorum assume & tum operare ut antea,

Compendii modus III per Multiplicationem & Divisionem simul.

3) M.

$$2\frac{2}{3} \sim 5 = 4$$

$$\frac{2}{3} \quad \frac{5}{15}$$

Primo Terminum $2\frac{2}{3}$ & secundum

4) D 2

$$D \left\{ \begin{array}{l} 15 \\ 2 \end{array} \right\} \left| 7\frac{1}{2} \right.$$

5 per numerum 3 multiplica: & assumtis productis 8 & 15 .

Secundo primum 8 & tertium 4 divide per 4 , & acquirantur 2 & 1 , tum 15 diviso per 2 prodibit $7\frac{1}{2}$ ut supra.

Vel

Vel hoc modo.

3) M.

$$\begin{array}{r} 2 \frac{2}{3} \sim 5 \frac{4}{3} \\ \hline 8 \end{array}$$

4) D

$$D \frac{15}{2} / 7 \frac{1}{2}$$

Primo terminum

primum $2 \frac{2}{3}$ &

tertium 4 per de-

nominatorem 3

multiplica, & af-

sumtis productis 8

& 12. in loco pri-

mo & tertio, eod-

em per 4 divide.

& tum ut juxta Re-

gulam fieri solet.

Demonstratio hujus Compendii.

Hæc fluit ex eo, quod si duo quilibet numeri per eundem numerum multiplicentur aut dividantur, tum producta, tum quotientes eandem inter se habeant rationem, quam habent duo isti Numeri propositi.

Sic si propositi duo numeri 3 & 6 multiplicentur per eundem numerum 2, ut fiant producta 6 & 12.

$$\begin{array}{r} \text{Erit } 3 \sim 6 \equiv 6 / 12. \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array}$$

Quia productum
Extremorum est
 ∞ producto me-
diorum.

Ergo loco rationis 3 ad 6 secure possumus substituere rationem 6 ad 12.

Si jam è contra duos numeros 6 & 12 per eundem numerum 2 dividamus, acquirentur quotientes 3 & 6.

Erit

Eritque rursus. $6 \sim 12 = 3 / 6$. Quare iterum loco rationis 6 ad 12 assumi potest ratio 3 ad 6.

Quæ si ad utriusque Compendii Modum I applicentur, absque ullo negotio istarum operationum patebit fundamentum.

In primo enim Exemplo rationis 4 ad 20, utroque termino per 4 diviso, acquiruntur quotientes 1 & 5. quia jam est $1 \sim 5 = 4 / 20$; pro hoc ultima ratione $4 \sim 20$: sumitur prior quæ est 1 ad 3.

In secundo autem Exemplo rationis $2 \frac{2}{3}$, seu $\frac{8}{3}$ ad 5 utroque termino per denominatorem 3 multiplicato, acquiruntur producta 8 & 15. quia autem est $\frac{8}{3} \sim 5 = 8 / 15$. loco primæ rationis assumi potest ratio secunda: quæ jam catet fractionibus.

Quod autem in utriusque Compendii Modo II. idem etiam applicetur ad terminos primum & tertium, suum habet fundamentum in eo, quod quando quatuor numerorum primus se habet ad secundum ut tertius ad quartum, etiam vicissim primus se habet ad tertium ut secundus ad quartum. Sic

$$\begin{array}{lcl} \text{Si sit} & 4 \sim 2 = 12 / 6. \\ \text{Erit quoque} & 4 \sim 12 = 2 / 6. \\ & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array}$$

Adeoquæ perinde est sive Terminus 2^{us} & 3^{us} locum suum retineant sive mutant: nulla enim inde oritur diversitas sive 2 multiplicetur per 12. sive 12 per 2: utroque modo enim acquireretur idem productum 24.

Sche-

Scholium.

Antequam relicta Regula proportionis directa, ad Inversam transeam, operæ pretium duxi adjungere quædam illud decantatum adeo Vulgarium Arithmeticorum compendium spectantia, quod apud illos Præceos vel Practicæ nomine indigitatum, maxime succinctam & brevissimam calculandi rationem dicit; & apud Mercatores ea de causa utramque paginam facit.

Quam ut ordine & cum fundamento tradam duo Lemmata præmittere necessarium duxi.

Lemma I.

Si quidam numerus proponitur multiplicandus per alium numerum totum seu non divisum: Idem autem numerus multiplicetur per ejusdem multiplicatoris duas aut plures partes, quæ simul toti sint æquales: Productum prioris Multiplicationis erit æquale omnibus productis posterioris multiplicationis simul sumtis.

E X E M P L U M I.

8	8	8	8
12	3	4	5
96	24	32	40
	32		
	40		
	96		

Oporteat multiplicare numerum 8 per 12. acquiritur productum 96.

Deinde multiplicator 12 dividatur in suas partes 3. 4. 5, quæ singulæ multipli-

placent eundem numerum 8 & obtinebuntur producta 24.
32. 40. quorum summa facit itidem 96.

Atque hoc generaliter in omnibus talibus Casibus evenire deprehenditur.

Demonstratio.

Hæc præcipue nititur communi notione quæ nobis dicitur, omnes partes cujusque totius simul sumptas esse æquales ipsi toti; unde totum sequitur totum per aliquem numerum multiplicatum, esse æquale omnibus partibus seorsim quidem per eundem numerum multiplicatis; sed postea in suis productis simul additis.

Sic multiplicando 8 per 12, seu reciproce 12 per 8, idem est ac si sumamus octuplum numeri 12: Multiplicando autem partes numeri 12, sc. 3. 4. 5, per eundem numerum 8, quæsumus octuplum omnium istarum partium, quæ ipsæ faciant 12, adeoque summa trium istorum octuplorum debet esse æqualis octuplo totius 12.

Lemma II.

Si idem numerus per duos diversos numeros multiplicetur, producta multiplicatoribus erunt proportionalia.

Hoc est si unus multiplicator sit duplex alterius, unum productum alterius etiam duplum erit. Si triplus, triplum. Si quadruplus, quadruplum: & sic porro juxta qualibet proportionem in infinitum.

E X E M P L A.

$$\begin{array}{r} 9 \\ 8 \\ \hline 72 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \\ 4 \\ \hline 36 \end{array}$$

Sit multiplicandus numerus 9 per 8, venit 72. deinde idem 9 multiplicetur per numeri 8 semissim 4, acquiritur 36 semissis producti 72.

$$\begin{array}{r} 9 \\ 6 \\ \hline 54 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \\ 2 \\ \hline 18 \end{array}$$

Numerus 9 multiplicatus per 6 dat 54. At vero idem 9 per 2, trientem numeri 6. dabit 18. tertiam partem producti 54.

$$\begin{array}{r} 9 \\ 12 \\ \hline 108 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \\ 3 \\ \hline 27 \end{array}$$

Numerus 9 multiplicatus per 12, producit 108; & per 3, ejus quadrantem, facit tantum 27, quartam partem producti 108.

Demonstratio.

Hæc manifesta est ex natura multiplicationis ante tradita: Sic quando Ex gr. multiplicamus 9 per 4, idem est ac si humerum 9 quater sibi ipsi subscribamus, & illos numeros tum addamus in unam summam quæ faciat 36. Quando autem multiplicamus 9 per 8, duplum numeri 4, idem erit ac si 9 octies, hoc est bis quater addamus; unde tum mirum non est summam posteriorem, esse duplam summæ prioris: adeoque & productum posterius duplum prioris.

Quæ demonstratio reliquis proportionibus nullo negotio applicari potest.

Porro quoniam hæc Praxis præcipue locum habet in quæstionibus, quæ varias species pecuniæ, ponderum vel men-

mensurarum continent, sequentes Tabellæ diligenter notandæ sunt

Reductioni stufferorum ad partes florenorum, aut solidorum ad partes librarum, inservit hæc

T A B E L L A I.

1	_____	I
		20.
2	_____	I
		10.
3 ∞ 2. 1.	_____	3
		20.
4	_____	I
		5
5	_____	I
		4.
6 ∞ 1. 2.	_____	3
		10.
7 ∞ 5. 2	_____	7
		20.
8 ∞ 4. 4.	_____	2
		5
9 ∞ 5. 4.	_____	9
		20.
10	_____	I
		2

$$11 \propto 10. 1. \frac{11}{20.}$$

$$12 \propto 10. 2. \frac{3}{5}$$

$$13 \propto 10. 2. 1. \frac{13}{20}$$

$$14 \propto 10. 4. \frac{7}{10.}$$

$$15 \propto 10. 5. \frac{3}{4}$$

$$16 \propto 10. 5. 1. \frac{4}{5}$$

$$17 \propto 10. 5. 2. \frac{17}{20.}$$

$$18 \propto 10. 4. 4. \frac{9}{10.}$$

$$10 \propto 10. 5. 4. \frac{19}{20.}$$

Si vero grotas ad partes solidi reducere oportet, sequens
usum habet

T A B E L L A II.

$$1 \frac{\text{---}}{\text{---}} \frac{1}{12.}$$

$$2 \frac{\text{---}}{\text{---}} \frac{1}{6.}$$

3 —

$$3 \text{ --- } \frac{1}{4}$$

$$4 \text{ --- } \frac{1}{3}$$

$$5 \propto 4. 1. \quad \frac{5}{12.}$$

$$6 \text{ --- } \frac{1}{2.}$$

$$7 \propto 6. 1. \quad \frac{7}{12.}$$

$$8 \propto 6. 2. \quad \frac{3}{3.}$$

$$4. 4.$$

$$9 \propto 6. 3 \quad \frac{3}{4}$$

$$10 \propto 6. 4. \quad \frac{5}{6.}$$

$$5. 5.$$

$$11 \propto 6. 4. 1 \quad \frac{11}{12.}$$

$$2. 3. 6$$

Denique si denarios in partes stufferi, aut uncias in partes unius Libræ mutare opus sit, adhibenda erit sequens.

TABELLA III.

$$1 \frac{\text{I}}{16}$$

$$2 \frac{\text{I}}{8}$$

$$3 \propto 2. 1. \frac{3}{16}$$

$$4 \frac{\text{I}}{4}$$

$$5 \propto 4. 1. \frac{5}{16}$$

$$6 \propto 4. 2. \frac{3}{8}$$

$$7 \propto 4. 2. 1. \frac{7}{16}$$

$$8 \frac{\text{I}}{2}$$

$$9 \propto 8. 1 \frac{9}{16}$$

$$10 \propto 8. 2 \frac{5}{8}$$

$$11 \propto 8. 2. 1. \text{---} \frac{11}{16.}$$

$$12 \propto 8. 4. \text{---} \frac{3}{4.}$$

$$13 \propto 8. 4. 1. \text{---} \frac{13}{16.}$$

$$14 \propto 8. 4. 2. \text{---} \frac{7}{8.}$$

$$15 \propto 8. 4. 2. 1. \text{---} \frac{15}{16.}$$

Quibus præmissis sequuntur Exempla

EXEMPLUM I.

Si 1 ulna coustet 2 solidis, quot constabunt ulnæ 421.

1	—	2	—	421.	—	
		§				
2	§	Lib.....	42.		§	
					2	

Juxta Regulam proportionis secundus terminus debet multiplicari per tertium: Cum autem secundus 2 § juxta

Tabellam I sit $\propto \frac{1}{10}$ Libræ: debet $\frac{1}{10}$ multiplicari per 421:

& juxta multiplicationem fractionum acquiritur $\frac{421}{10}$ hoc

M 3

est

est 42 $\frac{1}{10}$ Libræ: Quia jam $\frac{1}{10}$ Lib. ∞ 2 solidis: erit pretium quæsitum 42 \mathcal{L} . 2. β .

Hinc tum fit, quod a latere ponatur 2 β ∞ $\frac{1}{10}$ \mathcal{L} . & statim 421 dividatur per 10, ut obtineatur. 42 $\frac{1}{10}$ \mathcal{L} . hoc est 42 \mathcal{L} . 2 β .

E X E M P L U M II.

Si ulna constet 4 solidis, quot constabunt 277 ulnæ?

$$1 \text{ } \mathcal{L} \text{ } 4 \text{ } \beta = 277 \text{ } \mathcal{L} \text{ } \beta$$

$$4 \beta \propto \frac{1}{5} \mathcal{L} \dots 55 \text{ } \beta = 8.$$

Quia 4 β juxta Tabellam I. \mathcal{L}

$\frac{1}{5} \mathcal{L}$: debet

277 multipli-

cari per $\frac{1}{5}$ seu

277 dividi per 5. & habebitur 55 $\frac{2}{5} \mathcal{L}$ hoc est 55 \mathcal{L} 8 β .

EXEMPLUM III.

Si ulna 1 constet 9 solidis, quot constabunt 329.

$$1 \text{ } \sim \text{ } \frac{\text{§}}{9} = 329$$

$$3 \text{ §} \propto \frac{1}{4} \text{ } \mathcal{L} = 82 = \frac{\text{§}}{5}$$

$$4 \text{ §} \propto \frac{1}{5} \text{ } \mathcal{L} = 65 = 16$$

$$148 \text{ } \text{---} \text{ } 1$$

Per Tabellam I. 9 §
resolvuntur in 5 §
& 4 §. Est au-

tem § 5 $\propto \frac{1}{4} \text{ } \mathcal{L}$

& 4 § $\propto \frac{1}{5} \text{ } \mathcal{L}$

Quare primo

329 multiplicetur per $\frac{1}{4}$ hoc est 329 dividatur per 4. ut

veniat 82 \mathcal{L} . 5 §. Deinde 329 Multiplicetur per $\frac{1}{5}$.

hoc est 329 dividatur per 5. ut acquiratur 65 \mathcal{L} . 16. §.
quorum duorum productorum Summa 148 \mathcal{L} . 1 § erit æ-
qualis producto quod oritur ex multiplicatione numeri 329
per 9 §. per Lemma 1.

Possset autem eadem quæstio solvi hunc in modum.

$$1 \text{ } \sim \text{ } \frac{\text{§}}{9} = 329.$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ 296 \text{ } \text{---} \text{ } 1 \text{ } \text{---} \text{ } \text{§} \\ 148 \text{ } \text{---} \text{ } 1 \end{array}$$

Multiplicetur
329 per 9. &
fiunt 2961 §.
qui per 20 di-
visus dabit 148
 \mathcal{L} 1 §.

Adeoqde 148 \mathcal{L} 1 §. ut sup. a.

E X E M P L U M I V.

Si 1 ss constet 5 solidis 9 grotis, quot constrabunt 149 ss .

$$1. \text{ — } \overset{\text{ss}}{5} \text{ — } \overset{\text{ss}}{9} = 149.$$

$$\text{ — } \overset{\text{ss}}{5}$$

$$6 \text{ ss} \propto \frac{1}{10} \text{ P.} \dots\dots\dots 74 \text{ — } 6.$$

$$3 \text{ ss} \propto \frac{1}{2} \text{ P.} \dots\dots\dots 37 \text{ — } 3.$$

$$\text{ — } \overset{\text{ss}}{85} \mid \overset{\text{ss}}{6} \overset{\text{ss}}{9}$$

$$\text{ — } \overset{\text{ss}}{42} \mid \overset{\text{ss}}{\mathcal{L}} 16 \text{ ss. } 9 \text{ ss.}$$

Terminus
secundus 5 ss
9 ss : debet
multiplicari
per tertium
149: quare
primo 149
multiplicatur
per 5. & ac-
quiritur 745
 ss . Deinde 9

ss dividatur in 6 ss & 3 ss , & per singulas multiplicetur 149.

Sed quia 6 $\text{ss} \propto \frac{1}{2} \text{ ss}$ adeoque $\propto \frac{1}{10}$ solidorum. 5. Erit productum quod oritur ex multiplicatione numeri 149 per $\frac{1}{10}$ tantum decima pars producti quod oritur ex multiplicatione ejusdem numeri 149 per 5: quare hoc productum 745 dividatur per 10, & veniet 74 $\frac{5}{10} \propto 74 \frac{1}{2} \text{ ss} \propto 74$

ss. 6 ss .

Deinde quia 3 ss est semissis numeri 6 ss Præcedentis (qui semper litera P indigitatur) erit productum quod fit ex multiplicatione numeri 149 per 3 ss etiam semissis proxime præcedentis 74 ss . 6 ss : Quare hoc bisecto veniet productum 36 ss . 3 ss

Quæ tria producta 745 ss . 74 ss 6 ss . 37 ss . 3 ss . in u-
nam

De Regula de Tribus.

185

nam. summam si addantur, acquiritur 856 § 9 & hoc est 42 L , 16 § . 9 &.

Cæterum hujus operationis ratio patet ex Lemmate II.

EXEMPLUM V.

Si 1 Vas consent 12 L . 11. § . quæritur quot Consent vasa 236.

$$\begin{array}{r} 1 \text{ } \underbrace{\hspace{1cm}} \text{ } 12 \text{ } \text{---} \text{ } 11 \text{ } \text{---} \text{ } 236 \\ \phantom{1 \text{ } \underbrace{\hspace{1cm}} \text{ } 12 \text{ } \text{---} \text{ } 11 \text{ } \text{---} \text{ } } 12 \\ \phantom{1 \text{ } \underbrace{\hspace{1cm}} \text{ } 12 \text{ } \text{---} \text{ } 11 \text{ } \text{---} \text{ } } 472 \\ \phantom{1 \text{ } \underbrace{\hspace{1cm}} \text{ } 12 \text{ } \text{---} \text{ } 11 \text{ } \text{---} \text{ } } 236 \\ \phantom{1 \text{ } \underbrace{\hspace{1cm}} \text{ } 12 \text{ } \text{---} \text{ } 11 \text{ } \text{---} \text{ } } 118 \end{array}$$

Multiplica
236 prius per
12 L . & de-
inde per 11. §
seu 10 § &
1 § .

$$10 \text{ §} \propto \frac{1}{2} \text{ L} \text{ --- } 118$$

$$\begin{array}{r} 1 \text{ §} \propto \frac{1}{10} \text{ P. --- } 11 \text{ --- } 16. \\ \hline 2961 \text{ L } 16 \text{ §} \end{array}$$

Cum autem
10 § sint ∞
 $\frac{1}{2}$ L . deber
236 dividi per

2. ut habeatur 118.

Tum quia 1 $\text{§} \propto \frac{1}{10}$ præcedentis multiplicatoris 10 § . erit etiam productum præcedens decuplum producti quod jam quæritur: quare illud præcedens dividatur per 10 & fiet 11 L 16 § : quod fit manifestum per Lemma II.

Quicumque præcedentia Exempla bene percipit nullo negotio sequens solvet

EXEMPLUM VI.

Si 1 ulna constet 11 L 17 § 11 &. quanti vendentur ulna 873.

$$\begin{array}{r} \mathcal{L} \quad 8 \\ 11 \text{ --- } 17 \text{ --- } 11 \text{ --- } 873 \\ \hline 11 \end{array}$$

$$\text{A. } 10 \beta \infty \frac{1}{2} \mathcal{L} \text{ --- } \begin{array}{r} 873 \\ 436 \end{array} \text{ --- } 10$$

$$5 \beta \infty \frac{1}{2} \text{ P --- } 218 \text{ --- } 5$$

$$2 \beta \infty \frac{1}{5} \text{ A --- } 87 \text{ --- } 6$$

$$\text{B. } 6 \beta \infty \frac{1}{4} \text{ P --- } 21 \text{ --- } 16 \text{ --- } 6$$

$$3 \beta \infty \frac{1}{2} \text{ P --- } 10 \text{ --- } 18 \text{ --- } 3$$

$$2 \beta \infty \frac{1}{3} \text{ B --- } 7 \text{ --- } 5 \text{ --- } 6$$

$$10385 \mathcal{L} \text{ --- } 1\beta \text{ --- } 3\beta$$

EXEMPLUM VII.

Si 1 Vas confiter 3 s 7 $\frac{3}{4}$ s, quanti constabunt, 148 Vasa.

$$1 \sim 3 \sim 7 \frac{3}{4} = 148 \sim 4$$

$$\frac{3}{444}$$

$$6 s \propto \frac{1}{6} P \text{ ——— } 74$$

$$1 s \propto \frac{1}{6} P \text{ ——— } 12 \text{ — } 4$$

$$\frac{2}{4} s \propto \frac{1}{2} P \text{ ——— } 6 \text{ — } 2$$

$$\frac{1}{4} s \propto \frac{1}{2} P \text{ ——— } 3 \text{ — } 1$$

Diversitas hujus
a praeceutibus
fita est in gro-
tis 7 $\frac{3}{4}$: ubi

prius 7 fecatur
in 6 & 1. &

tum $\frac{3}{4}$ in $\frac{2}{4}$ &

$\frac{1}{4}$ cum quibus

proceditur ut
ante.

$$\begin{array}{r} 53 | 9 \quad 7 s \\ \hline 26 | \mathcal{L} 19 s 7 s. \end{array}$$

EXEMPLVM VIII.

Si 1 \mathcal{L} constet 2 \mathcal{L} 19 \mathcal{B} 11 $\frac{7}{8}$ \mathcal{S} . quanti vendi de-
bent 239 \mathcal{S} .

$$\begin{array}{r} \mathcal{L} \quad \mathcal{B} \quad \mathcal{S} \\ 1 \sim 2 \text{ --- } 19 \text{ --- } 11 \frac{7}{8} \text{ --- } 239 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 478 \end{array}$$

$$A \quad 10 \mathcal{B} \propto \frac{1}{4} P \text{ --- } 119 \text{ --- } 10$$

$$5 \mathcal{B} \propto \frac{1}{2} P \quad 59 \text{ --- } 15$$

$$4 \mathcal{B} \propto \frac{1}{5} \mathcal{L} \quad 47 \text{ --- } 16$$

$$B \quad 6 \mathcal{S} \propto \frac{1}{8} P \quad 5 \text{ --- } 19 \text{ --- } 6$$

$$3 \mathcal{S} \propto \frac{1}{2} P \quad 2 \text{ --- } 19 \text{ --- } 9$$

$$2 \mathcal{S} \propto \frac{1}{3} B \quad 1 \text{ --- } 19 \text{ --- } 10$$

$$\frac{4}{8} \mathcal{S} \propto \frac{1}{2} \mathcal{S} \propto \frac{1}{4} P \quad 0 \text{ --- } 9 \text{ --- } 11 \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{8} \propto \frac{1}{2} P \quad 0 \text{ --- } 4 \text{ --- } 11 \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{8} \propto \frac{1}{2} P \quad 0 \text{ --- } 2 \text{ --- } 5 \frac{7}{8}$$

$$716 \mathcal{L} \text{ --- } 17 \mathcal{B} \text{ --- } 6 \frac{1}{8} \mathcal{S}$$

Ubi

Ubi ad lineam tertiam notandum sc. $4 \text{ } \mathcal{L} \propto \frac{1}{3} \text{ } \mathcal{L}$ il-

Jam non habere respectum ad productum præcedens (cum litera P non sit notata) sed ad numerum 239 in quaestione datum : cujus sumenda est pars quinta $47 \text{ } \mathcal{L} \text{ } 16 \text{ } \mathcal{B}$, quæ in catalogo notata est.

Possæt autem poni etiam hoc modo.

$$\begin{array}{rcl} 2 \text{ } \mathcal{B} \propto \frac{1}{5} \text{ } \mathcal{A} & \text{—————} & 23 \text{ ———} 18 \\ & & \text{Et veniet} \\ & & \text{idem nume-} \\ 2 \text{ } \mathcal{B} \propto & \text{P —————} & 23 \text{ ———} 18 \\ & & \text{rus cum prio-} \\ & & \text{ri.} \\ & & \text{—————} \\ & & 47 \text{ ———} 16 \end{array}$$

Cæterum dubitare licet merito, utrum hæc Operatio brevior sit illa quæ per viam ordinariam procedit.

EXEMPLUM IX.

Si 1 Vas constet $2 \text{ } \mathcal{L} \text{ } 13 \text{ } \mathcal{B} \text{ } 7 \text{ } \mathcal{S}$. quanti constabunt $524 \frac{3}{8}$. Vasa.

Ad quam quaestionem solvendam prius juxta præcedentia quaeratur pretium vasorum 524 ac si fractio non adesset; deinde fractionem $\frac{3}{8}$ divide in $\frac{2}{8} \propto \frac{1}{4}$ & $\frac{1}{8}$: pro priori pretium datum $2 \text{ } \mathcal{L} \text{ } 13 \text{ } \mathcal{B} \text{ } 7 \text{ } \mathcal{S}$ divide per 4. & pro posteriori $\frac{1}{8}$ quæ est semissis prioris $\frac{2}{8}$: numeri modo inventi sume semissin: & tum porro ut supra omnia pretia singularia addantur in unam summam, ut obtineatur pretium totale quaesitum.

Ope-

Operatio porro quæstionis propositæ solutioni inservit talis.

$$1 \text{ } \mathcal{L} \text{ } 2 - 13 \text{ } \text{ss} \text{ } 7 = 524 \frac{3}{8}$$

$$10 \text{ ss} \propto \frac{1}{2} \text{ } \mathcal{L} \text{ } \frac{1048}{262}$$

$$2 \text{ ss} \propto \frac{1}{5} \text{ } P \text{ } 52 \text{ } 8$$

$$1 \text{ ss} \propto \frac{1}{2} \text{ } P \text{ } 26 \text{ } 4$$

$$6 \text{ ss} \propto \frac{1}{2} \text{ } P \text{ } 13 \text{ } 3$$

$$1 \text{ ss} \propto \frac{1}{6} \text{ } P \text{ } 2 \text{ } 3 \text{ } 8$$

$$\frac{2}{8} \propto \frac{1}{4} \text{ } 0 \text{ } 13 \text{ } 4 \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{8} \propto \frac{1}{2} \text{ } P \text{ } 0 \text{ } 6 \text{ } 8 \frac{3}{8}$$

$$1404 \text{ } \mathcal{L} \text{ } - 17 \text{ ss} \text{ } - 9 \frac{1}{8} \text{ ss}$$

EXEMPLUM X.

Si 1 ulna constet 17 flor. 19. stuf. quanti constabunt

$$422 \frac{23}{32}$$

1 ~

$$1 \text{ } \sim \text{ } 17 \text{ } \text{---} \text{ } 19 \text{ } \text{---} \text{ } 422 \text{ } \begin{smallmatrix} 23 \\ 32 \end{smallmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \hline 2954 \\ 422 \end{array}$$

$$A \text{ } 10 \text{ ft. } \infty \frac{1}{2} \text{ flor. } \text{---} \text{ } 211$$

$$5 \text{ ft. } \infty \frac{1}{2} \text{ P } \text{---} \text{ } 105 \text{---} 10$$

$$2 \text{ ft. } \infty \frac{1}{5} \text{ A } \text{---} \text{ } 42 \text{---} 4.$$

$$2 \text{ ft. } \infty \text{ P } \text{---} \text{ } 42 \text{---} 4.$$

$$\frac{16}{32} \infty \frac{1}{2} \text{---} \text{---} \text{ } 8 \text{---} 19 \text{---} 8$$

$$\frac{4}{32} \infty \frac{1}{4} \text{ P } \text{---} \text{---} \text{ } 2 \text{---} 4 \text{---} 14.$$

$$\frac{2}{32} \infty \frac{1}{2} \text{ P } \text{---} \text{---} \text{ } 1 \text{---} 2 \text{---} 7$$

$$\frac{1}{32} \infty \frac{1}{2} \text{ P } \text{---} \text{---} \text{ } 0 \text{---} 11 \text{---} 3 \frac{1}{2}.$$

$$7587 \text{ fl: } 16 \text{ ft: } 0 \frac{1}{2} \text{ den.}$$

feu

$$1264 \text{ } \mathcal{L} \text{ } 12 \text{ } \mathcal{B} \text{ } 8 \frac{1}{16} 8.$$

Loco

Loco 2 ft : bis sumptorum potuisset etiam sumi 4 ft : ∞
 $\frac{1}{5}$ flor : & tum numerus in quæstione datus 422 de-
 buisset dividi per 5. & fuisset inventus numerus 84 flor. 8
 ft. qui est æqualis 42 flor: 4 ft: bis sumto.

E X E M P L U M XI.

Si i Vas constet. 1 £ 18 s 7 d. quanti vendatur 269

$$\frac{31}{32}$$

$$1 \text{ £ } 18 \text{ s } 7 \text{ d} = 269 \frac{31}{32}$$

$$A \text{ 10 s } \infty \frac{1}{2} \text{ £ } = 134 \frac{19}{2}$$

$$5 \text{ s } \infty \frac{1}{2} \text{ P } = 67 \frac{5}{2}$$

$$2 \text{ s } \infty \frac{1}{5} \text{ A } = 26 \frac{18}{5}$$

$$1 \text{ s } \infty \frac{1}{2} \text{ P } = 13 \frac{9}{2}$$

$$6 \text{ d } \infty \frac{1}{2} \text{ P } = 6 \frac{14}{2} = 6$$

$$1 \text{ d } \infty \frac{1}{6} \text{ P } = 1 \frac{2}{6} = 5$$

$$\frac{16}{32} \infty \frac{1}{2} = 0 \frac{19}{2} = 3 \frac{1}{2}$$

$$\frac{8}{32} \infty \frac{1}{2} \text{ P } = 0 \frac{9}{2} = 7 \frac{3}{4}$$

$$\frac{4}{32} \propto \frac{1}{2} P \text{ ————— } 0 \text{ — } 4 \text{ — } 9 \frac{7}{8}$$

$$\frac{2}{32} \propto \frac{1}{2} P \text{ ————— } 0 \text{ — } 2 \text{ — } 4 \frac{15}{16}$$

$$\frac{1}{32} \propto \frac{1}{2} P \text{ ————— } 0 \text{ — } 1 \text{ — } 2 \frac{15}{32}$$

$$520 \text{ } \mathcal{L} - 16 \text{ } \text{ss} - 3 \frac{17}{32} \text{ } \text{ss}$$

EXEMPLUM XII.

Si 1 ss constet 3 \mathcal{L} 15 ss 9 $\frac{1}{2}$ ss quæritur pretium
158 $\frac{1}{2}$ ss .

$$1 \text{ — } 3 \text{ — } 15 \text{ — } 9 \frac{1}{2} = 158 \frac{1}{2}$$

$$10 \text{ } \text{ss} \propto \frac{1}{6} P \text{ ————— } 474 \text{ — } 79$$

$$5 \text{ } \text{ss} \propto \frac{1}{2} P \text{ ————— } 39 \text{ — } 10$$

$$6 \text{ } \text{ss} \propto \frac{1}{10} P \text{ ————— } 3 \text{ — } 19 \text{ — }$$

$$3 \text{ } \text{ss} \propto \frac{1}{2} P \text{ ————— } 1 \text{ — } 19 \text{ — } 6$$

$$\frac{1}{2} \text{ } \text{ss} \propto \frac{1}{6} P \text{ ————— } 0 \text{ — } 6 \text{ — } 7$$

$$\frac{1}{2} \text{ ————— } 1 \text{ — } 17 \text{ — } 10 \frac{3}{4}$$

$$\text{Pretium quæsitum} = 600 \mathcal{L} - 12 \text{ } \text{ss} - 11 \frac{3}{4} \text{ } \text{ss}$$

N

E X E M P L U M XIII.

Si 1 Ulna constet 15 β 9 $\frac{3}{4}$, quanti constabunt

$$55 \frac{3}{4} \text{ ulnar.}$$

$$\begin{array}{r} \beta \quad \quad \quad \beta \\ 1 \text{ — } 15 \text{ — } 9 \frac{3}{4} = 55 \frac{3}{4} \\ \hline 15 \\ 275 \\ 55 \\ \hline 825 \end{array}$$

$$6 \beta \propto \frac{1}{2} \beta \propto \frac{1}{30} P \text{ — } 27 \text{ — } 6$$

$$3 \beta \propto \frac{1}{2} P \text{ — } 13 \text{ — } 9$$

$$\frac{3}{4} \beta \propto \frac{1}{4} P \text{ — } 3 \text{ — } 3 \frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{4} \propto \frac{1}{2} \text{ Ulna — } 7 \text{ — } 10 \frac{7}{8}$$

$$\frac{1}{4} \propto \frac{1}{2} P \text{ — } 3 \text{ — } 11 \frac{7}{16}$$

$$88 | 1 \beta - 6 \frac{9}{16} \beta$$

$$44 | \mathcal{L} 1 \beta 6 \frac{9}{16} \beta$$

EXEM-

EXEMPLUM XIV.

Si 1 ℥ constat 13 ſ 10 $\frac{1}{4}$ q , quanti constabunt 16 $\frac{1}{4}$ ℥

$$1 \sim 13 \text{ — } 10 \frac{1}{4} \text{ — } 16 \frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ 48 \\ 16 \end{array}$$

$$6 \text{ q} \propto \frac{1}{2} \text{ ſ} \quad 8$$

$$4 \text{ q} \propto \frac{1}{3} \text{ ſ} \text{ — } 5 \text{ — } 4$$

$$\frac{1}{4} \text{ q} \propto \frac{1}{16} \text{ p} \text{ — } 0 \text{ — } 4$$

$$\frac{1}{4} \text{ ℥} \text{ — } \text{ — } 3 \text{ — } 5 \frac{9}{16}$$

Pretium quaesitum 22 ſ 1 $\frac{9}{16}$ q

ſeu

$$22 \text{ ℥} 5 \text{ ſ} 1 \frac{9}{16} \text{ q}$$

$$\frac{2}{4} \propto \frac{1}{2} \text{ ————— } 1 \text{ — } 0 \frac{7}{16}$$

$$\frac{1}{4} \propto \frac{1}{2} P \text{ ————— } 0 \text{ — } 8 \frac{7}{32}$$

Pretium quæsitum 8 l. ft. — 10 $\frac{25}{32}$ den.

feu 4 flor. 1 ft. 10 $\frac{25}{32}$ den.

EXEMPLUM XVI.

Si 3 l. constet 3 stuf. 0 $\frac{3}{4}$ den. quo pretio vendentur
40 $\frac{1}{2}$ l.

$$\begin{array}{r} \text{ft.} \quad \text{d.} \\ 1 \text{ — } 3 \text{ — } 0 \frac{3}{4} \text{ — } 40 \frac{1}{2} \\ \hline 3. \\ 120 \end{array}$$

$$2 \text{ den.} \propto \frac{1}{8} \text{ ft.} \propto \frac{1}{24} P \text{ — } 8$$

$$\frac{2}{4} \text{ den.} \propto \frac{1}{4} P \text{ — } 1 \text{ — } 4$$

$$\frac{1}{4} \text{ den.} \propto \frac{1}{2} P \text{ — } 0 \text{ — } 10$$

$$\frac{1}{2} \text{ lb} \text{ ————— } 1 \text{ — } 8 \frac{3}{8}$$

Pretium quæsitum ————— 12 | 3 ft — 6 $\frac{3}{8}$ den.

Seu ————— 6 fl. 3 ft. 6 $\frac{3}{8}$ den.

Poterit autem eadem quæstio etiam solvi hunc in modum.

ft. d.

$$1 \text{ lb} 3 \text{ — } 0 \frac{3}{4} \text{ — } 40 \frac{1}{2}$$

120

$$3 \text{ den. } \propto \frac{1}{16} \text{ P — } 1 \text{ — } 1$$

$$\frac{3}{4} \text{ den. } \propto \frac{1}{4} \text{ P — } 1 \text{ — } 14$$

$$\frac{1}{2} \text{ ————— } 1 \text{ — } 8 \frac{3}{8}$$

Pretium quæsitum 12 | 3 ft. — 6 $\frac{3}{8}$ den. ut supra.

Vel sic ab^cque denariis fictitiis.

ft.	d.	
1 ~ 3	0 $\frac{3}{4}$	$40 \frac{1}{2}$
	<u>4</u>	<u>3</u>
		120
$\frac{3}{4}$ den.	$\infty \frac{1}{64}$ P	1. — 14
$\frac{1}{2}$		1. — 8 $\frac{3}{8}$
		<u>123 ft. 6 $\frac{3}{8}$ d. ut requiritur.</u>

EXEMPLUM XVII.

Si 1 ulna constet 5 fl. 8 den. quanti constabunt ulnae $40 \frac{3}{4}$

fl.	ft.	den.
1 ~ 5	0	8 $\frac{3}{4}$
		<u>4</u>
		5
		200

1 ft. $\infty \frac{1}{100}$ P ——— 2

8 den. $\infty \frac{1}{2}$ P ——— 1

$\frac{2}{4} \infty \frac{1}{2}$ ——— 2 ——— 10 ——— 4

N 4

$\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{4} \propto \frac{1}{2} P$$

$$1 \text{ — } 5 \text{ — } 2$$

Pretium quæsitum	204 fl.	15 ft.	6 d.
------------------	---------	--------	------

Vel hoc modo absque numero ficto.

fl.	ft.	d.	
5	0	8	40 — $\frac{3}{4}$
			5
			200

$$8 \text{ den.} \propto \frac{1}{2} \text{ ft.} \propto \frac{1}{4} \text{ ft.} \propto \frac{1}{200} P \text{ — } 1$$

Jam reliqua ut supra.

Atque hæc sufficiant ad clarum intellectum eorum quæ Practicam spectant; cum reliquæ quæstiones in quibus primus terminus non est Unitas, facillius per Vulgarem Regulæ Proportionis operationem expediri queant.

CAP. III.

De Regula Proportionis Simplici inversa.

Contigere autem sæpe potest ut datis tribus quantitativibus quæraturs quartus reciproce proportionalis, hoc est, ut quemadmodum primus ad tertium, ita reciproce quartus inveniendus ad secundum datum; seu ut quanto primus est major minorve tertio; tanto etiam quartus incognitus sit major minorve secundo.

Et Regula harum quæstionum solutioni inserviens dicitur Regula Proportionis Inversa, seu Reciproca.

Ut

De Regula Proport. Simpli. inversa. 201

Ut autem pateat quamnam Operationem hæc Regula exigit ponamus quatuor quantitates. A quæ sit I. B. 2da C. III. Q. IV. Sit in proportionem reciproca, ut modo dictum.

$$\begin{array}{cccc} \text{I} & & \text{III} & \text{IV} & \text{II} \\ \text{A} & \sim & \text{C} & = & \text{Q} / \text{B} \\ \text{Erit juxta Theorema} & & & & / \end{array}$$

A in B \propto C in Q.
Et utrimque dividendo per C.

$$\frac{\text{A in B}}{\text{C}} \propto \text{Q.}$$

Ex quibus patet datis tribus numeris positus in ordine. primum & secundum per se invicem debere multiplicari; & postea illud productum debere dividi per tertium, ut veniat quartus quæsitus.

Ordo disponendi numeros datos hic idem est qui supra in Regula proportionis directa fuit observatus. Scilicet

Numerus cui annexa est quæstio ponendus loco tertio.

Illi homogenius loco primo.

Numerus reliquus. qui solitarius est, poni debet in medio.

E X E M P L U M I.

Fossores 1000 munitionem aliquam absolvunt 12 diebus

Ergo fossores 325 eandem munitionem quot diebus absolvent,

Numerus 325. cui annexa est quæstio ponendus loco tertio,

Numerus 1000. ipsi 325 homogeneus, primo loco.

Numerus 12. qui solitarius est, ponatur in medio.

N 5

Hoc

Hoc modo,

Fossore	dies	1300
1000	12	228
12	M.	325 / 12000
12000		325

36
300
325

Venit numer. quæsitus ∞ 36 $\frac{12}{13}$ dies..

Demonstratio sequens huic Exemplo applicata, ad omnia eodem modo mutatis mutandis referri potest.

Luculenter patet opus fossorum 1000 in diebus 12 esse debere æquale operi fossorum 325 in diebus (primo quæsitis & post inventis) 36 $\frac{12}{13}$ cum nimirum una eadem-

que munitio ab utraque parte sit absolvenda. Quare necessario productum 1000 fossorum in suos dies 12 debet esse æquale producto fossorum 325 in suos dies quæsitos.

Unde jam facile innotescit quæsitus dierum Numerus si sc : productum 12000 dividatur per 325 tum enim reperietur numerus qui cum divisore multiplicatus faciat productum æquale priori dividendo, Ut jam ex Multiplicationis & Divisionis natura patet.

Ex quibus manifesta sit differentia hujus Regulæ Inversa & Regula directæ. Sicut illic spectatur æqualitas rationum, seu Quotientum (qui divisione inquiruntur) Ita hic æqualitas Productorum quam multiplicatione acquirimus.

Nempe illic Ut terminus I ad II sic III ad IV. Et productum I in IV est ∞ producto III.

Hic vero erit Ut terminus I ad III sic IV ad II. & productum I in II est ∞ producto III in IV.

Nota

Nota

Utrum autem in quæstionibus resolvendis uti debeamus Regula Directa an vero inversa, duo sequentia nos docebunt indicia.

I

Si ex natura quæstionis, quo major est terminus tertius vel minor eo etiam major vel minor requiratur quartus, Regula directa opus est.

Si vero e contra quo major est tertius eo minor requiratur quartus; vel quo minor tertius, eo major requiratur quartus; Regulam Inversam adhibere oportet.

II.

Si duo termini homogenei id est eandem rem significantes, aliam quampiam rem unicam, & a terminis quæstionis diversam communiter respiciant, circa quam lato sensu aliquid agant ad quod duo reliqui termini sese habeant per modum circumstantiæ. Tum Inversa & Reciproca proportio erit.

Si vero hæc Nota non adsit. Directa erit Proportio.

Ex quibus indiciis rite perpensis statim patebit Exemplum I modo allatum ad Inversam pertinere Proportionem.

Cum enim fossores 1000 ad perficiendum aliquod opus pauciores requirant dies quam fossores pauciores sc: 325, ad idem opus absolvendum;

Ergo cum tertius 325 primo minor requirat quantum secundo majorem juxta Indicium I. obtinet hic Proportio inversa.

Seu

Seu quia duo termini homogenei sc: fossiores respiciunt rem aliquem communem sc: Munitionem, circa quam isti fossiores aliquid agant. & duo reliqui termini se habent ad modum circumstantiz, sc: Temporis; ex secundo Indicio patet iterum Inversa Proportionis esse Exemplum.

E X E M P L U M I I.

Si in Urbe obsessa 7 menses ali possunt prædiarii
1500 ergo mensibus 12. quot possunt.

Menses Præsid: Menses

$$7 \sim 1500 = 12$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ \hline 10500 \end{array}$$

88

108888

11111

11

88

88

88

875 Numerus quæsitus

In hoc Exemplo tertius III est major I. & tamen requiritur IV minor II. Facile enim patet eundem com meatum pauciores homines diutius posse alere, quam plures. Adeoque hic proportio requiritur Inversa.

Vel etiam res a terminis quæstionis diversa, circa quam duo homogenei aliquid efficere debent, est com meatus obsidionis tempore a prædiariis consumendus: quare jam ex Indicio II hic iterum fit manifestum hoc Exemplum Inversam spectare Proportionem.

E X E M P L U M I I I.

Si Sartor ex panno lato $\frac{3}{4}$ ulnæ pallium confecturus
opus habeat 4 ulnis. Quæritur quot ulnæ requirantur ex
panno lato $1\frac{1}{2}$ ulnas, ut simile consuat pallium.

Numerus $1\frac{1}{2}$ ponatur loco tertio.

Numerus $\frac{3}{4}$ ipsi homogeneus loco primo.

Numerus 4 Solitarius loco medio.

Latitudo panni Ulnæ Lat. panni

$$M \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{4} \quad \sim \quad 4 = 1\frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} \quad \text{D. per } \frac{3}{2} \end{array} \right.$$

Prod. $\frac{4}{3}$ D. per $\frac{3}{2}$.

Quotiens $\frac{6}{3} \propto 2$. Numerus quæsitus.

Cum hic terminus III sit major I & requiratur IV mi-
nor II quia quo pannus est latior eo minor requiritur lon-
gitudo seu ulnarum numerus, patet ex Indicio I hanc quæ-
sitionem pertinere ad proportionem inversam.

EXEMPLUM IV.

Si una panni ulna Amstelodami constet 10 Solidis
8. Grot. quæritur quanti constare debet ulna ejusdem
panni Antverpiæ, quando 100 ulnæ Amstelodamenses fa-
ciant 103 ulnas Antverpienses.

Numeri dati in hunc modum sunt disponendi.

per suum pretium

Ulnæ Amstelod: M. Solid: Grot.

$$\begin{array}{r}
 100 \quad \text{---} \quad 10 \quad \text{---} \quad 6 \quad \text{---} \quad 103 \\
 \quad \quad \quad 12 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 120 \\
 \quad \quad \quad 6 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 126 \\
 \quad \quad \quad 100 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{c} 126 \\ 100 \end{array}} \right\} M \\
 \hline
 \quad \quad \quad 12600
 \end{array}$$

Ulnæ Antverp: / M. in pretium suum

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 3} \\
 \underline{2} \quad 8 \quad 4 \\
 1 \quad 2 \quad 8 \quad 0 \quad 0 \\
 1 \quad 0 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \\
 1 \quad 0 \quad 0 \\
 1 \\
 1 \quad 0 \quad 8 \\
 2 \quad 0 \quad 8 \\
 2 \quad 0 \quad 8
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{c} 2 \overline{) 3} \\ 1 \quad 2 \quad 8 \quad 0 \quad 0 \\ 1 \quad 0 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \\ 1 \quad 0 \quad 0 \\ 1 \end{array}} \right\} 122 \frac{34}{103} \text{ Grot.}$$

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 2 \quad \overline{) 2} \\
 1 \quad 2 \quad 2 \\
 1
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad \overline{) 2} \\ 1 \quad 2 \quad 2 \\ 1 \end{array}} \right\} 10 \text{ Solidi}$$

Ergo numeris quæsitus erit

$$10 \text{ Solidi } 2 \frac{34}{103} \text{ Grotæ.}$$

. Cum

De Regula Proport. Simpl. inversa. 207

Cum unus idemque pannus Amstelodamensi mensura contineat ulnas 100, Antverpiensi vero 103, patet ulnam Amstelodamensem esse majorem Antverpiensi; deinde quoniam idem pannus unius ejusdemque est pretii, necessario ulna Antverpiensis minori constat pretio quam Amstelodamensis.

Quare cum terminus III sit major I, & tamen requiratur IV minor II. proportio erit inversa.

Poterimus autem eandem questionem hoc modo aggredi, per duas Regulas, Unam sc. directam & alteram Inversam.

Ulna Amst: Ulna Antv: Ulna Amst: Ulna Antverp
 Directa 100 — 103 — 1 / $\frac{103}{100}$

Ulna Amstel: Gros: Ulna Antverp.)
 Inversa. 1 — 126 — $\frac{103}{100}$

$$\begin{array}{r} 126 \\ \hline 126 \end{array} \quad \text{Divide per } \frac{103}{100}.$$

$$\begin{array}{r} 12600 \\ 103 \overline{) 12600} \end{array} \quad \begin{array}{r} 122 \\ 103 \overline{) 12200} \end{array} \quad \begin{array}{r} 34 \\ 103 \overline{) 3400} \end{array} \quad \text{ut supra.}$$

E X E M P L U M V.

Hospes quidam in suis ædibus habet 12 convivas, qui singulis 7 diebus bibunt vasculum vini. Queritur si contingat, ut accedant adhuc 4 alii, quot diebus idem vasculum biberetur.

Ter-

Termini sic stabunt.

Convivæ	Dies	Convivæ
12	7	16
$\frac{7}{84}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{4}$

diebus. Numerus quæsitus.

Ut convivæ 16 vasculum vini ebibant, pauciores requiruntur dies quam ut 12 idem faciant.

Quare cum sit terminus III major I & requiratur IV minor II ex indicio I erit Inversa.

Vel quia duo termini homogenei circa unum & idem vasculum a terminis quæstionis diversum aliquid agunt: & reliqui sese habent ad modum circumstantiæ sc: Temporis pertinebit hoc Exemplum ad proportionem Inversam juxta Indiciū Secundum.

E X E M P L U M V I.

Si quidam Amicus mihi mutuo dederit Libras 200 ad tempus 8 mensium. Quæritur, ut parem ipsi referam gratiam quot Libras ipsi rursus commodare debeam per 6 menses.

Menses	Libræ	Menses.
8	200	6 / ?
$\frac{200}{1600.}$	$\frac{4}{1600}$	$\frac{4}{6.}$

Libras.

Numerus quæsitus
erit
266 Libræ
13 Solidi
4 Semistufieri.
Libræ

$\frac{2}{3}$ Libræ hoc modo reducantur ad Solidos $\frac{2}{3}$ M:
p : 20.

$$\frac{2}{3} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 13 \end{array} \right\} \frac{1}{3} \text{ Sol:}$$

$$\frac{1}{3} \text{ M: p 12.}$$

$$\frac{12}{3} \propto 4 \text{ Semistuf: seu Grotæ.}$$

Ut amicitia utrinque sit æqualis, per brevius tempus debet commodari major summa pecuniæ, quam ab altera parte factum erat per majus tempus :

Adeoque rursus cum III terminus sit minor I. & requiratur IV major II. per Ildum indicium. hoc Exemplum erit Proportionis Inversæ.

EXEMPLUM VII.

Si mensura Tritici constet 60 florenis, venditur pro 5.

$\frac{1}{2}$ stuferis panis 12 ℥: Quæritur quando eadem mensura tritici constat 90 florenis, quot librarum esse debeat panis manente eodem pretio?

Termini sic stabunt.

Floreni	℥ panis	Floreni
pretium Tritici		Pret. Tritici

$$60 \quad \text{---} \quad 12 \quad \text{---} \quad 90$$

$$\frac{720}{90} \left\{ \begin{array}{l} 8 \text{ ℥. Pondo panis.} \end{array} \right.$$

O

Quo

Quo triticum est carius eo pondus panis debet esse minor.

Adeoque quia Terminus III major I & requiritur IV minor II pertinet hoc Exemplum ad Regulam proportionis inversæ.

EXEMPLUM VIII.

Præfidiariis arcis cujusdem obsessæ sufficit panis pro tempore 13 Mensium, quando singuli quotidie consumunt 12 Uncias panis.

Cotigit autem post 8 menses & 10 dies, ut juramento se obstringant, se obsidionem adhuc 8 menses persequentur. Quæritur

Quot uncia panis singulis debeant distribui.

Nota mensem hic comprehendere 30 dies

Quæstio hæc sic resolvenda erit.

13	8 — 10	Menses 13 per
30	30	30 ad dies redu-
390	240	ti facient 390
250	10....	dies. Deinde
140	250	menses 8 & dies
		10 similiter fa-
		cient dies 250,

qui à prioribus dempti relinquent 140 dies : ad quod tempus præfidiarii singulis diebus possunt habere 12 uncias panis. Jam autem non 140 dies sed 8 menses, id est 240 dies arcem tenere volunt, & quæritur quantum panis singulis diebus tum accipere debeant :

De Regula Proport. Simpl. inversa. 211.

Dies	Unciæ
1 4 0	12 240
1 2	
2 8 0	1 8 8 8 { 7 Unciæ panis. quibus singuli
1 4 0	1 8 8 { quotidiè debent esse contenti.
1 6 8 0	1 8 1 8

Quo tempus est longius, eo minorem panis portionem quilibet consumere debet.

Ergo rursus quia est Terminus III major I & requiritur IV minor II porportio erit inversa.

EXEMPLUM IX.

Oenopola habet in quodam vase 200 pintas, viui & una pinta constat 10 stufenis. quæritur quot pintas aquæ vino miscere debeat ut pinta constet 8 stufenis.

Ut pinta constet 10 stufenis. requiruntur 200 pintæ : (quia omnium pinctarum est 200 stufeni.) Ergo ut pinta valeat 8 stufenos, quot pintæ debent esse : manente tamen eodem pretio, siue vinum sit mixtum siue purum.

Fiat itaque

Stuf.	Numerus	stuf.
pretium pintæ	pintarum	pretium pintæ.
10	200	8
	10	

2000 2 8 8 8 { 250 Numerus quæsitus
Pintarum.

quæ debent contineri in vase, ut pinta valeat 8 stufenos.

O 2

Ergo

Ergo debent affundi 50 pintæ aquæ, quæ supponitur nullius esse pretii.

Quia hic est Terminus III minor I & requiritur IV major, II proportio est Inversa.

EXEMPLUM X.

Si 12 Scriptores librum aliquem describant 20 diebus quæritur quot diebus 36 Scriptores eundem librum describent.

Termini sic ordinandi sunt.

Scriptores	Dies	Scriptores	
12	20	36	
$\frac{20}{240}$	$\frac{24}{240}$	$\frac{24}{36}$	$\propto 6 \frac{2}{3}$ Dies quæsit.

$\left. \begin{array}{l} 24 \\ 240 \end{array} \right\} 6$
 $\frac{24}{36} \propto 6 \frac{2}{3}$

Cum plures scriptores librum istum minori temporis spatio possint describere quam pauciores idem facient: & hinc existente termino III majore I. requiratur IV major II. Erit rursus proportio Inversa. juxta Indicium Primum.

Scholium I.

Examen & Probatio hujus Regulæ absolvitur æqualitate productorum; quæ oriuntur ex multiplicatione termini I in II & termini III in quæsitum IV. quando illa duo sunt inter se æqualia, certi esse possumus legitimum & justum numerum esse inventum.

Potest autem etiam examen institui invertendo quæstionem quemadmodum in Exemplo ultimo hoc modo fieri potest.

Vel sic

4) $\frac{12}{5} \overline{) 18} = 3 \frac{3}{5}$. Dividendo II. & III
par 4.

$D\left\{\frac{60}{9}\right\} 6 \frac{6}{9} \infty 6 \frac{2}{3}$ idem qui antea.

Exemplum Multiplicationis.

Sit illud Inversum precedentis, quod sic fuit ordinatum.

Scriptores	Dies	Scriptores	
36	$6 \frac{2}{3}$	12.	Multiplicando II & III per 3
3 M.	feu $\frac{18}{3}$		Et adhuc
	20	36.	Dividendo I & III per 36.
36)D. 1		I	

Adeoque fere absque multiplicatione aut divisione elaborari poterit hoc Exemplum, cum unitas utrinque inventa nec multiplicet nec dividat, & tamen acquiratur Numerus 20, qui requiritur.

E X E M P L U M X I.

Quando triticum constat 60 florenis panis pendens 12 $\frac{1}{2}$ venditur $5 \frac{1}{2}$ fluf.

Quæritur quot pendeat idem panis si triticum constet 90 flor.

Flor.

Flor.	Panis ss	Flor.
60	12	90
..... 60		
	72	} 8 ss Panis
	90	

Compendium.

30) ss ss ss ss

2	12	3
	2	
	24	
	3	

} 8 ut supra.

Vel

15) ss ss ss ss

4	12	6
	2	
	4	
	8	

E X E M P L U M XII.

Ad conficiendam togam rusticus eget $4\frac{1}{2}$ ul-
nis Panni lati $2\frac{1}{4}$.

Quær: quantum debeat emere, ex panno lato $2\frac{1}{8}$.

O 4

Lat

Lat.		Long.		Lat.
$2 \frac{1}{4}$	~	$4 \frac{1}{2}$	=	$2 \frac{1}{8}$
<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>		<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>		<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>
$\frac{9}{4}$	M	$\frac{9}{2}$		$\frac{17}{8}$ ulnæ
<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>		<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>		
$\frac{81}{8}$		Div. $\frac{17}{8}$		ulnæ

Venit Quotiens $\propto 4 \frac{13}{17}$ ulnæ

E X E M P L U M XIII.

Quædam pecunia solvitur, ut 400 ℥ mercium vehantur 10 miliaria.

Quæritur quot miliaria vehi debeant 1200 ℥ pro eadem pecunia.

℥		Mil.		℥
400	~	10	=	1200
<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>		4		}
$\frac{10}{4000}$		40 0 0		3 $\frac{4}{12} \propto 3 \frac{1}{3}$
		12 0 0		
		38		

Compendium.

4) $400 \sim 10 = 1200 \left| \frac{10}{3} \propto 3 \frac{1}{3} \right.$

EXEM-

EXEMPLUM XIV.

Quidam Campus latus $15\frac{3}{4}$ perticas, longus $24\frac{1}{2}$ perticas est æqualis alteri cuidem campo, lato $28\frac{1}{2}$ perticus. Quæritur hujus longitudo.

Lat.	Long.	Lat.
$15\frac{3}{4}$	$24\frac{1}{2}$	$28\frac{1}{2}$
$\frac{63}{4}$	$\frac{49}{2}$	$\frac{57}{2}$
4	2	2.
<p>facit $13\frac{123}{228}$ f. $13\frac{41}{76}$</p>		

Scholium III.

Facillime poterit Proportio Inversa mutari in Directam si terminos datos legamus à dextra versus Sinistram. & quæsitum quartum, si fuerit inventus, in eo ordine ponamus loco quarto.

Ut hoc quoque patet in eodem Exemplo decimo.

Scriptores	Dies	Scriptores
12	20	36.
I	II	III

Si jam ponatur ordine Retrogrado.

III ~ II = I. / IV.

Seu

I ~ IV = III / II.

Permutando

I ~ III = IV / II.

Quæ proportio naturam & constitutionem hujus Regule exprimit, ut supra vidimus.

CAPUT IV.

De Regula Proportionis Composita.

Dicitur hæc Regula Composita, quia ex duabus vel pluribus constat Proportionibus; adeoque Regule Simplicis operationem iterari posse significat.

Dicitur etiam à Vulgaribus Arithmeticis Regula de quinque; At vero hæc Denominatio ei convenit quando tantum quinque dati sunt termini, Cum autem plures dari possint quam quinque Ex. gr. 7 aut 9, potius Regula de multis dicenda esset quam de quinque.

Nititur autem hæc Regula iisdem principiis cum simplici ita ut longa præparatione non sit opus, sed aliquot exemplis ipsam operandi methodum exhibere sufficiat.

EXEMPLUM I.

Si Mercatores 8 florenis 1000 lucrantur 700 florenos. Quæritur, 10 mercatores 4000 florenis quot florenos lucrabuntur.

Tres numeri hic sunt principales: sc. 8 Mercatores: lucrum 700 florenorum & 10 Mercatores.

Duobus Homogeneis reliqui duo adhærent, qui illorum quasi comites sunt.

Si tum pro numero incognito ponatur litera majuscula Q, quæ significabit numerum Quæsitum: habentur 6 Numeri, qui quando juxta quæstionis naturam in ordine sunt positi, in duo membra distingui possunt: Primum membrum constituent tres priores numeri quæstionis: Secundum

De Regula Proport. Composita. 219

cundum vero tres posteriores: saltem in hoc Casu quando est Regula de quinque.

Sic in nostro Exemplo: membro primo continentur
8 Mercatores, florenis 100, lucrantur 700 florenos.

Secundo vero membro comprehenduntur
10 Mercatores, florenis 4000, lucrantur Q.

Notandum præterea, quando numeri primi secundum naturam questionis sunt ordinati, etiam Numeros secundi membri eodem ordine disponendos esse.

I Membrum. Fiat itaque II Membrum.

Mercat.	Floreni	Lucrum
8	— 100	700

Mercat.	Floreni	Lucrum
10	— 4000	Q.

In hoc membro 8 Mercatores est unus ex principalibus terminis, cui secundus 1000 floreni servit tanquam medium quo Lucratur 700.

Ergo si illi duo sc. 8 & 1000 in se multiplicentur facient unum terminum 8000.

Similiter in hoc 2do membro Principalis Numerus 10 debet multiplicari per suum medium quo suum facit lucrum Q, ut fiat etiam unus terminus 40000.

Quo facto Questio sic habet.

Merc.	Flor.	Lucrum
1	800	700

Mercat.	Flor.	Lucrum.
1	4000	Q.

Nam perinde est sive dicas

8 Mercatores florenis 1000 Lucrantur flor. 700

Igitur

Igitur

10 Mercatores florenis 4000 Lucrantur flor. Q.

Sive dicas

1 Mercator florenis 8000 lucrabitur flor. 700

Igitur

1 Mercator florenis 40000 lucrabitur flor. Q.

Atque in hac posteriori forma duo termini evanescent, quod primo utriusque membri loco iidem recurrant sc. 1 mercator : quare illorum ratio habenda non est. Igitur salva quaestione 6 termini reducuntur ad 4 hosce.

Sors unius	Ejus	Sors unius	Ejus Lucrum.
Mercatoris	Lucrum	Mercatoris	
8000	700	40000	Q

Quia quatuor isti termini sunt proportionales, erit productum extremorum æquale producto mediorum.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l} 8000 \\ Q \end{array} \} M. \quad \begin{array}{l} 40000 \\ 700 \end{array} \} M \\
 \hline
 8000 Q \propto 28000000 \\
 \hline
 Q \propto 3500 \quad \text{Div. utrinque per 8000}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 28000000 \\
 8000 \overline{) 28000000} \\
 \hline
 3500
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} 000 \\ 000 \end{array} \right\} 3500 \text{ Numerus quaesitus.}$$

Potest autem hæc quaestio, ut & omnes in 5 terminis propositæ, per duas Simples Proportionis Regulas facile resolvi; comparari enim poterunt tum Personæ personis, tum sors in mercaturam exposita sorti.

Cum

De Regula Proport. Composita, 221

Cum sorte 1000 floredorum.

Mercat. Lucrum Mercur. Lucrum.

8 700 10 / venit 875.

Tum 10 Mercatores.

Sors Lucrum. Lucrum quæsitum;

1000 875 4000 / venit 3500

4

3500

E X E M P L U M II.

Si 3 equi consumant 36 cophinos avenæ diebus 6.
Quæritur quot diebus 9 Equi debeant consumere 180 cophinos.

Cujus quæstionis termini hoc modo ex illius natura sunt disponendi

Membrum I.			Membrum II.		
Equi	Dies	Cophin	Equi	Dies quæsit	Coph.
3	6	36	9 M	Q	180.
6	:		Q	
18		9 Q		

Multiplicetur utrobique Causa Efficiens sc: Equi in suam circumstantiam temporis, & venient termini 18 & 9 Q.

Perinde enim est ac si quæstio hoc modo esset proposita.

Equi	Dies	Cophini	Equi	Dies	Cophini
18	1	36	9 Q	1	180.

Quia autem utrinque est 1 dies, duo illi termini salva quæstione poterunt deleri,

Quant.

Quando sc. remanebunt hi quatuor termini proportionales.

Consumunt uno die

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Equi} & & \text{Cophinos} & & \text{Equi} & / & \text{Cophinos} \\
 18 & \sim & 36 & = & 9 & / & 180 \quad (2) \\
 1 & & 2 & & & / & 90 \\
 & & 1 & & & &
 \end{array}$$

$$\frac{9 \text{ Q} \propto 90, \text{ D. per } 9 \text{ utrinque}}{\text{Q} \propto 10.}$$

Poterit hæc Quæstio iterum satis commodè resolvi per duas Regulas Proportionis directas. Hoc modo.

In 6 diebus

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Equi} & & \text{Coph.} & & \text{Equi} & & \text{Coph.} \\
 3 & \sim & 36 & = & 9 & / & \text{venit } 108 \\
 & & & & 3 & & \\
 & & \text{Tum } 9 \text{ Equi} & & & & \\
 \text{Coph.} & \text{Dies} & \text{Coph.} & & & & \\
 108 & \sim & 6 & = & 180 & & \\
 & & 6 & & & &
 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1080 / \\ 108 / \end{array} \right. 10 \text{ Dies Numer. quæsitus.}$$

Quinimo Eadem quæstio solvi quoque facile poteris per Unam Regulam Proportionis Inversam & per Unam directam.

Consumunt 36 Cophinos.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Equi} & \text{Dies} & \text{Equi} & \text{Dies.} \\
 \text{Proportio Inversa. } 3 & \sim & 6 & = & 9 & / & \text{venit } 2
 \end{array}$$

Equi

Equi 9 consumunt

Coph. Dies Coph.

Proportio directa 36) $\frac{1}{1} \sim 2 = 72$ Venit 10. Dies
 Numer. quæsi-
 tus. ut ante.
 M 2
 10.

EXEMPLUM III.

Si 10 Fossiores effodiunt perticas 4. diebus 3. Quæritur quot diebus 100 Fossiores debeant effodire 2000 perticas

Termini juxta tenorem Quaestionis hoc modo sunt ordinandi.

Membrum I.		Membrum II.
Fossiles Perticæ Dies		Fossiles Perticæ Dies
$\begin{array}{r} 10 \\ 3 \end{array} \} M \quad 4 \quad 3$		$\begin{array}{r} 100 \\ Q \end{array} \} M \quad 200 \quad Q$
$\begin{array}{r} 30 \\ \hline \end{array}$		$\begin{array}{r} 1000 Q. \\ \hline \end{array}$

Causa Efficiente rursus in suam circumstantiam temporis utrobique ducta, idem erit ac si quæstio sic esset propo-
sita.

Foffores	Perticae	Dies	Foffores	Perticae	Dies
30	4	1	1000 Q	2000	1

Quare dies utroque in membro evanescent, & remane-
bunt hi quatuor termini Proportionales.

Fof-

Effodient uno die.

Fossore Perticæ Ergo Fossore Perticæ.

$$30 \sim 4 = 100 Q / 2000$$

Adeoque juxta Theorema erit Productum Extremorum \propto Prod. mediorum.

$$\text{Et propterea } \frac{400 Q \propto 60000}{Q \propto 150} \text{ div. utrinque per } 400$$

$$\begin{array}{l} 2 \\ \cancel{8} \cancel{8} 0 \mid \begin{array}{l} 00 \\ 00 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 00 \\ 00 \end{array}} \right\} 150 \\ \cancel{8} \cancel{8} \cancel{8} \end{array}$$

Nulla negotio hoc Exemplum resolvi poterit per duas Regulas Proportionis directas : hunc in modum.

Diebus 3 effodiunt

Fossore Pert. Ergo Fossore Pert.

$$10 \sim 4 = 100 / 40$$

Deinde Fossore 100 effodiunt

Pert. Dies Pert. Dies

$$\begin{array}{llll} 20) & \cancel{8} \cancel{8} & 3 = & \cancel{8} \cancel{8} \cancel{8} / \text{venit } 150 \text{ dies} \\ & \cancel{8} & & \cancel{8} \cancel{8} \text{ Numerus quæsitus.} \\ 2) & 1 & & 50 \text{ idem qui antea.} \\ & & & \underline{3} \\ & & & 150 \end{array}$$

Vel resolvatur eadem quæstio per Unam Inversam & unam directam.

Ad

De Regula Proport. Composita. 225

Ad fodiendum 4 Perticas impendunt

Fosfores Dies Fosfores Dies

$$\text{Reg. Inversa. } 10 \sim 3 = 100 \mid \frac{3}{10}$$

Deinde effodiunt 100 Fosfores

Pert. Dies Pert. Dies

$$\text{Reg. Directa. } 4 \sim \frac{3}{10} = \frac{2000}{500} \mid \text{prodit } 150 \text{ ut sup.}$$

$$\frac{150}{1} \mid \frac{0}{0} \{ 150$$

Scholium.

Quia unum idemque Exemplum resolvi potest modo in duas Regulas simplices directas, modo in Unam Inversam aliam Directam ut hoc Exemplum præsens & præcedens & quæstio manifestum reddunt, patet Distinctionem hujus Regulæ Compositæ in Directam & Inversam, quæ apud Vulgares Arithmeticos invenitur, nullius omnino esse momenti; idque eo magis cum duo Exempla istius distinctionis, quod afferunt, fundamentum tollant,

Quibus adhuc accedit, quod eas quæstiones, quas isti Authores ad Regulam Compositam, Inversam referunt eodem modo, quo præcedentes enodavimus, resolvere facile sit.

Præterquam quod Criteria distinguunt istas Regulas à se invicem, adeo sint obscura & confusa, ut cujusque Operationem exinde deducere haud parum sit difficile.

Quare nos ista distinctione rejecta, eidem, qua capimus, insistemus Methodo,

P

EXEM

E X E M P L U M IV.

Si 9 Rustici bibant 12 vasa cerevisiæ 9 diebus: Quæritur quot diebus 24 Rustici bibent 120 vasa.

Rustici	Vasa	Dies	Rustici	Vasa	Dies
9 } M	12	9	24 } M	120	Q.
9 }		:	Q }		:
<u>81</u>			<u>24</u> Q.		

Termini principales agentes multiplicentur singuli per suos dies & tum idem erit ac si quæstio sic fuisset proposita.

Rustici	Vasa	Dies	Rustici	Vasa	Dies
81	12	1	24 Q	120	1

Quare evanescente utrobique termino dierum, remanebunt hi quatuor Termini Porportionales.

Uno die bibent.

Rustici	Vasa	Ergo	Rustici	Vasa.
81	12		24 Q	120
<u>5</u>	1		12 Q	10
405	∞ 12 Q.			5
33 $\frac{3}{4}$	∞ Q.			

Numerus dierum quæsitus.

De Regula Proport. Composita. 227

Resolutio per duas Regulas Simples Directas.

Diebus 9 bibunt.

Rustici	Vasa	Rustici	Vasa
3) 8	12	12	1
3) 8	4	8	32.
1			

Tum 24 Rustici bibunt.

Vasa	Dies	Vasa	Dies
4) 32	9	120	veniunt
2) 8		30	3
4		15	33 $\frac{3}{4}$ Dies. ut requir.

Vel per unam Inversam & alteram Directam.

Rustici	Vasa	Dies	Rustici	Dies
Inversa. 9	9	24	1	$\frac{81}{24}$

Tum 24 Rustici bibunt

Vasa	Dies	Vasa
Directa 12) 12	$\frac{81}{24}$	120 /
1		10.

$$\begin{array}{r} \frac{12}{1} \\ \hline 8 \overline{) 81} \\ \underline{80} \\ 10 \end{array} \left\{ 33 \frac{18}{24} \infty 33 \frac{3}{4} \text{ Numer. dier. quæsitus.} \right.$$

E X E M P L U M V.

Si 1000 milites accipiant Stipendium 48000 flor. 6 mensibus. Quæritur quandiu milites 100000 sustentari possint Stipendio flor. 240000:

Termini hoc modo collocentur

Milites	Stipend.	Menses	Milites	Stipend.	Menses
1000	48000	6	100000	240000	Q.
6.....	:	:	Q.....	:	:
6000			100000	Q.	

Qua multiplicatione utrinque facta, quæstio sic stabit

Milites	Stipend.	Menses	Milites	Stipend.	Menses
6000	48000	1	100000	240000	1

Adeoque mensibus deletis remanent quatuor Proportionales.

Accipiunt uno Mense.

Milites	Stipend.	Milites	Stipend.
8888	48000	100000	240000
1	8	1	24

Adeoque 8 Q^o 24.

Q^o 3 menses Quæriti.

Resolutio per duas Regulas Simples directas.

Mensibus 6.

Milites	Stipend.	Milites	Stip.
1000	48000	100000	480000
1	48		

Tum

Tum 100000 Milites accipiunt.

Stipend.	Menses	Stipend.	Menses
4800000	6	2400000	
2		1	
$\frac{6}{2} \left\{ 3 \text{ Numerus mensium quæsitus.} \right.$			

Resolutio per unam Inversam & alteram directam.
Accipiunt Stip. 48000 fl.

Inversa.	Milites	Menses	Milites.	Menses
	1000	6	100000	
	1		100	
				$\frac{6}{100} \propto \frac{3}{50}$

Accipiunt 100000 Milites

Directa. Stipend. Mens. Stipend.

24)	4800000	$\frac{3}{50}$	2400000
2)	2		100
	1		50
$\frac{3}{50} \text{ M. per } 50 \text{ venietque } 3. \text{ Numer. quæsitus.}$			

Examen & proba.

Hoc 5 modis potest institui, quoties scilicet quæstio potest inverti: Nos autem tantum duò elaborata dabimus, quæ spectant Secundum Quæstionis membrum: Tria Reliqua tantum digito monstraturi, spectantia Inversiones quæ circa Membrum Primum possunt fieri.

Pro Examine I Quæstio sic proponatur.

Si 1000 Milites accipiant Stipendium flor. 48000 in 6 mensibus. Quæritur quantum stipendium debeant accipere 100000 Milites in 3 Mensibus.

Milites	Stipend.	Menses	Milites	Stipend.	Menses
1000	48000	6	100000	Q	3
6	2	3		
6000			300000		

Ergo.

$$\begin{array}{r}
 8888 \sim 48888 = 300000 | Q \\
 1 \quad M | 8 \\
 \hline
 1 \quad Q \propto 2400000
 \end{array}$$

Pro Examine II hoc modo proponatur Quæstio.

Si 1000 Milites accipiant Stipendium flor. 48000 in 6 mensibus. Ergo quot milites accipient Stipendium 2400000 flor. in 3 Mensibus.

Milites	Stipend.	Menses	Milites	Stipend.	Menses
1000	48000	6	Q	2400000	3
6		3	
6000			3 Q		

Ergo

$$\begin{array}{r}
 8888 \sim 48888 = 3 Q | 2400000 \\
 1 \quad 8 \\
 \hline
 24 Q \propto 2400000 - D. per 24. \\
 Q \propto 100000
 \end{array}$$

Pro

De Regula Proport. Composita. 231

Pro Examine III hanc formam induat Quæstio.

Si 100000 Milites accipiant Stipendium flor. 2400000
in 3 mensibus. Quæritur quot mensibus milites 1000 ac-
cipere debeant Stipend. 48000 fl. Et invenienda est
Q ∞ 6.

Pro Examine IV sic stabit Quæstio.

Si 100000 Milites accipiant Stipendium flor. 2400000
in 3 mensibus. Ego quantum Stipendium accipient 1000
milites in 6 mensibus.

Hic invenienda est Q ∞ 48000.

Pro Examine V hunc in modum Quæstio disponatur.

Si 100000 Milites accipiant Stipendium flor. 2400000
in 3 mensibus Quæritur quot milites accipient 48000 flor:
in 6 mensibus

Ubi invenienda Q ∞ 1000

Possunt autem hæ examinum formæ ad omnino hujus
Regulæ Exempla applicari.

E X E M P L V M VI.

Si 10 homines expendant 4 Aureos diebus 3. Ergo quot
diebus homines 100 expendet 2000 Aureos.

Quæstionis termini hoc modo in ordinem sunt redigen-
di

Homines	Aurei	Dies	Homines	Aurei	Dies.
10	4	3.	100	2000	Q.
3	Q.
30			100 Q.		

Adeoque sunt Proportionales

10) $\frac{80}{3} \sim 4 = \frac{1}{x} Q | \frac{x}{200}$

4 Q^o 600.

 Q^o 150. dies quæſiti.

Resolutio per duas Regulas Simples directas.
In 3 diebus.

Homines	Aurei	Homines		Aurei.
10	4	100		49.

Tum Homines 100

Aurei	Dies	Aurei	Dies
40	3	2000	?
I	50	50	
	150		

Resolutio per unam Inversam, & alteram directam.
Aureos 4 expendunt.

	Homines	Dies	Homines	Dies.
Inversa,	$\frac{10}{1}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{10}{1}$	$\frac{3}{10}$

Deinde Homines 100 expendunt

Directa	Aurei	Dies	Aurei	Dies.
	4	$\frac{3}{10}$	2000	3
	1		500 M	$\frac{3}{10}$

$$\frac{1500}{10} \propto 150 \text{ dies ut requiritur.}$$

De Regula porport. Composita. 233

Examinis gratia eadem quaestio in hanc formam mutetur.

Si 10 Homines expendant 4 Aureos 3 diebus. Quæritur quot homines debeant expendere 2000 Aureos 150 diebus

Homines	Aurei	Dies	Homines	Aurei	Dies
10	4	3	Q	2000	150
3	150
30			150 Q		

Ergo

$$30) 30 \sim 4 \overline{=} 120 Q \quad | \quad 2000$$

1 1 5 5000

Adeoque $5 \overline{Q} 2000 \overline{=} 500$

$Q 2000 \overline{=} 100.$ Ut requiritur.

Cujus Examini hunc nobis proposuimus scopum, ut pateat quomodo & hæc quaestio immutata tum ad duas Regulas Simples directas, tum ad unam Inversam & alteram directam revocari queat.

Resolutio per duas directas.

Homines 10. expendunt.

Diebus	Aurei	Dies	Aurei
3	4	120	2000
1		50	

Diebus 150 consumuntur

Aurei	Homines	Aurei	Homines
120	10	2000	100. ut requiritur.
		10	

Resolutio per unam Inversam & alteram Directam.

Aureos 4 expendunt.

	Dies	Homines	Dies	Homines.
Inversa	3	15	15	1
	1	1	15	5

Diebus 150.

	Aurei	Homines	Aurei	Homines.
Directa	4	1	150	
	1	5	M... 500	

$$\frac{500}{5} \propto 100 \text{ Numer. quæ sit. idem qui in superioribus.}$$

E X E M P L U M V I I.

Si 200 sacci tritici molantur 2 molis in 6 diebus:

Quæritur quot diebus 480 sacci molentur molis 8?

Quæstionis termini hunc in modum ordinantur

Molz	Sacci	Dies	Molz	Sacci	Dies
2	200	6	8	480	Q
6			Q		
12			8 Q		

Ergo

4)	12	150	150	150
	3	15	15	15
		5		12

Adeoque

10 Q \propto 36
$$Q \propto 3 \frac{6}{10} \propto 3 \frac{3}{5} \text{ numerus dierum quæ sit.}$$

Re-

De Regula Proport. Composita. 235

Resolutio per duas Simples directas.

Diebus 6.

$$\begin{array}{cccc} \text{Molæ} & \text{Sacci} & \text{Molæ.} & \text{Sacci} \\ 2 & \sim 200 & \equiv 8 & / \quad 800 \end{array}$$

Tum Molæ 8

$$\begin{array}{cccc} \text{Sacci} & \text{Dies} & \text{Sacci} & \text{Dies} \\ 800 & \sim 6 & \equiv 480 & / \quad ? \text{ venit } 3 \frac{3}{5} \text{ ut supra.} \end{array}$$

Resolutio per unam Inversam & unam Directam.

Sacci 200.

$$\begin{array}{cccc} \text{Molæ} & \text{Dies} & \text{Molæ} & \\ \text{Inversa.} & 2 & \sim 6 & \equiv 8 / \quad 1 \frac{2}{8} \end{array}$$

Deinde.

Molæ 8.

$$\begin{array}{cccc} \text{Sacci} & \text{Dies} & \text{Sacci} & / \text{ Dies.} \\ 40) 200 & \sim \frac{12}{8} & \equiv 480 & / \quad \frac{44}{40} \infty 3 \frac{3}{5} \text{ ut requirit.} \end{array}$$

EXEMPLUM VIII. cum fractionibus.

Si 100 floreni lucrantur 4 florenos in 12 mensibus;
Quæritur quod lucrum faciunt 500, in $10 \frac{1}{2}$ mensibus.

Floren-

Floreni	Lucrum	Menses	Floreni	Lucrum	Menses
100	4	12	500	} ^Q _M	10 ^I _{2.}
12	.	.	21		21
<u>1200</u>			<u>2</u>		<u>2</u>
			10500		
			2.		
			feu 5250		

Ergo Proportionales erunt.

4) $\frac{2200}{30} \sim \frac{525}{30} Q$
 $\frac{22}{33} \left| \frac{51}{0} \right\{ 17 \frac{15}{30} \infty 17 \frac{1}{2}$ Numer.
 quæritur

Resolutio per duas Simples directas.

Lucrantur Mensibus 12.

Floreni	Lucrum fl.	Flor.	Lucrum.
100	4	500	20.

Lucrantur floreni 500.

Menses Lucrum Menses Lucrum.

$$\begin{array}{r} 12 \text{ — } 20 = 10 \frac{1}{2} \\ 3 \qquad 5 \qquad \frac{2}{2} \\ \hline \text{f. } \frac{21}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 3} \\ 108 \left\{ \begin{array}{l} 17 \frac{1}{2} \text{ ut supra.} \\ 88 \end{array} \right. \end{array}$$

Refo

Resolutio per Unam Inversam, alteram directam.

Lucrantur 4 florenos.

	Floreni	Menses	Floreni	Menses
Inversa.	100	12	500	$\frac{12}{5}$

Tum Lucrantur 500 floreni

Menses Lucrum fl. Menses Lucrum.

$$4) \frac{12}{5} \sim 4 = 10 \frac{1}{2} /$$

$$\frac{3}{5} \quad \frac{21}{2} / D. \frac{3}{5} \text{ venit } \frac{105}{6} = 17 \frac{1}{2}$$

ut requiritur.

EXEMPLUM IX. cum 7 Numeris.

Hucusque notavimus Exempla in 5 numeris proposita, ut quæreretur sextus: Cum autem supra dictum sit hanc Regulam vocandam esse non tam Regulam de 5 quam quidem Regulam de Multis; operæ pretium fore duxi, si jam afferrentur quædam Exempla in 7 numeris, ad invenendum numerum octavum.

Quæstio autem huc pertinens talis est.

Si 8 Mercatores florenis 1000, mensibus 2 lucentur fl: 700.

Igitur

10 Mercatores florenis 4000 mensibus 3, quot flor: lucrabuntur.

Cum

Cujus termini sic sunt ordinandi.

Mercat.	Flor.	Mens.	Lucr.	Mercat.	Flor.	Mens.	Lucr.
8	1000	2	700	10	4000	4	Q.
2	...	:		4	...	:	

Multiplica terminos principales, sc: Mercatores in sua tem-
pora. Et fit.

Mercat:	Flor:	mens:	Lucr.	Mercat:	Flor:	Mens:	Lucr.
16	1000	1	700	40	4000	1	Q.
1000				4000			

Multiplica iterum terminos Principales sc: Mercatores, in
suas collatas sortes.

Mercat:	Flor:	mens:	Lucr:	Mercat:	Flor:	mens:	Lucr.
16000	1	1	700	160000	1	1	Q.

Quia jam utrimque duo numeri sunt iidem, sc: Floreni
cum florenis. & Menses cum mensibus, illi ab utraque par-
te evanescunt, ut tantum remaneant hi quatuor termini
Proportionales.

$$\frac{10000}{1} \sim \frac{700}{10} = \frac{100000}{Q.}$$

$$Q \propto 7000.$$

Resolutio ejusdem Quaestionis per tres Regulas Simpli-
ces Directas.

Florenis 1000. Mensibus 2.

Mercatores	Lucrum	Mercatores	Lucrum.	I
8	700	10	875	

Tum Mercatores 10. Mensibus 2.

Floreni	Lucrum	Floreni	Lucrum.	II.
1000	875.	400	3500.	

Deni-

De Regula Proport. Compos. 139

Denique Mercatores 10. Florenis 4000.

Menses Lucrum Menses Lucrum. III
 2 35000 = 4 / 7000. ut antè.

Resolutio ejusdem Quæstionis per Unam Inversam & duas directas.

Lucrantur 700 flor: florenis 1000

Mercatores Menses Mercatores Menses.
 8 2 = 20 / $\frac{16}{10}$ I Inversa.

Tum Mercatores 10 florenis 1000

Menses Lucrum Menses Lucrum
 $\frac{16}{10}$ 700 = 4 / 1750

Denique Mercatores 10 Mensibus 4.

Floreni Lucrum Floreni Lucrum.
 1000 1750 = 4000 / 7000
 Venit Numerus quæ-
 situs qui requiritur.

EXEMPLUM X. cum 7 terminis datis.

Si operarii 12 septimanis 20, singulis septimanis operati
 5 dies accipiant mercedem 1000 florenorum.

Igitur

Operarii 9 septimanis 30 singulis septimanis operati
 6 dies, quot florenos in mercedem debeant accipere.

Quæstio sic ordinanda.

Oper.	Sept.	Dies	sept.	Mer.
12	20	5		1000
		5		

Op.	Sept.	Dies	sept.	Mer.
9	30	6		Q.
		6		

Multi-

Multiplica primo circumstantias temporis per se invicem & fiet quæstio

Oper. Sept. Dies sept. Merc.	Oper. Sept. Dies sept. Merc.
12 100 1 1000	9 180 1 Q.
100	180

Deinde multiplica in utroque membro terminos Principales sc: Operarios singulos per suas septimanas : quando quæstio sic stabit.

Oper. Sept. Dies sept. Merc.	Oper. Sept. Dies sept. Merc.
1200 1 1 1000	1620 1 1 Q.

Adeoque terminis iisdem utrinque evanescentibus 8 termini quæstionis reducti erunt ad hosce quatuor proportionales.

$$\begin{array}{l}
 4) \quad 1200 \quad \sim \quad 1000 \quad = \quad 1620 / Q \\
 3) \quad 3 \quad M \begin{array}{l} 135 \\ \hline 1350 \end{array} \quad \infty Q. \quad 135
 \end{array}$$

Numerus quæsitus.

Illam autem Reductiouem ad hosce 4 terminos putamus esse ex præcedentibus nimis claram quia ut proluxa Demonstratione opus sit.

Resolutio per 3 regulas Simples directas.

Septimanis 20 operando 5 dies in septimana.

Operarii	merced.	Operarii	merced.	I
12	~	1000	=	9 / 750.

Tum Operarii 9 Septimanis 20.

Dies	merced.	Dies	merced.	II
5	~	750	=	6 / 900.

Deni-

De Regula Proport. Composita. 241

Denique Operarii 9 Operando Dies 6

Septimanae Merces Septimanae Merces III
 $20 \sim 900 = 30 / 1350$ Numerus
 quæsitus ut ante.

Resolutio per Unam Inversam & duas directas.

Mercedem 1000 operando 5 dies

Operarii Septimi Operarii Septim. I Inversa.
 $12 \quad 20 \quad 9 / \frac{80}{3}$

Tum Operarii 9 operando 5 dies

Septim. Merces Septim. Merces II Directa.
 $\frac{80}{3} \sim 1000 = 30 / 1125$

Denique Operarii 9 Septimanis 30 III Directa

Dies Merces Dies Merces.

$5 \sim 1125 = 6 / 1350$ Numerus quæsitus
 ut requiritur.

E X E M P L U M XI.

Ubi proponitur quæstio 9 terminorum, ut inveniatur decimus. Si in quodam Monasterio sint Cubicula 7, in singulis luceant 5 lampades, habentes singulæ 3 Ellychnia, & sic 20 septimanis consumantur 3 Vasa Olei.

Igitur.

In alio Monasterio, si sint 12 Cubicula, & in singulis luceat 7 Lampades habentes singulæ 4 Ellychnia, quæritur 25 septimanis quot vasa Olei consumi debeant.

Q

Cujus

Cujus quæstionis termini hunc in modum ordinentur.

Cub.	Lamp.	Elly.	Sept.	olei.	Cub.	Lamp.	Elly.	Sept.	olei.	Vasa
7	5	3	20	3	12	7	4	24	Q	
	3...	...				4...	...			

Primo multipl. lampad. per sua Ellych. & quæst. sic stabit

7	15	1	20	3	12	28	1	25	Q.
15					28				

Deinde multiplica Cubicula per suas Lampad. & habebitur

105	1	1	20		336	1	1	25	Q.
20					25				

Denique multipl. Cubicula per suas septeman. quibus lucent

2100	1	1	1	3	4800	1	1	1	Q.
------	---	---	---	---	------	---	---	---	----

Per quas multiplicationes patet obtineri utrimque 3 terminos eosdem, quibus evanescentibus quæstio sit reducta ad hos 4 Proportionales.

$$3) 2100 \sim 3 = 8400 / Q.$$

7

Div. per 7. 7 Q ∞ 84.

Q ∞ 12. Vasa Olei quæsit.

Resolutio Ejusdem per 4 Regulas trium directas.

Lamp. 5. Ellychn. 3. Sept. 20.

Cub. Vasa. Cub. Vasa.

$$7 \sim 3 \sim 24 \sim 36$$

Cub

De Regula Proport. Composita. 243

Cub. 12. Ellychn. 3. Sept. 20.
 Lamp. Vasa Lampad. Vasa II
 $5 \sim \frac{36}{7} = 7 \quad / \quad \frac{36}{5}$

Cub. 12. Lamp. 7. Sept. 20.
 Ellych. Vasa. Ellych. Vasa. III.
 $3 \sim \frac{36}{5} = 4 \quad / \quad \frac{144}{15}$

Cub. 12. Lamp. 7. Ellych. 4,
 Sept. Vasa Sept. Vasa. IV.
 $20 \sim \frac{144}{15} = 25 \quad / \quad 12 \text{ ut requir.}$

Alia Resolutio per unam Inversam & tres directas.

Vasa 3. Lamp. 5. Ellych. 3.
 Cub. Sept. Cub. Septim. I Inversa,
 $7 \sim 20 = 12 \quad / \quad \frac{35}{3}$

Cub. 12. Lamp. 5. Ellych. 3.
 Sept. Vasa Sept. Vasa. II Directa.
 $\frac{35}{3} \sim 3 = 25 \quad / \quad \frac{45}{3}$

Cub. 12. Ellych. 3. Sat. 25.
Lamp. Vasa. Lamp. Vasa. III. Directa.

$$5 \sim \frac{45}{7} = 7 / 9.$$

Cub. 12. Lamp. 7. Sept. 25. IV. Directa.

Ellych. Vasa. Ellych. Vasa.

$$3 \sim 9 = 4 / 12. \text{ Numerus Vasorum}$$

quæsitus qui repe-
ritur idem qui su-
pra.

Observatio Generalis ad hanc Regulam.

Ex quibus omnibus patet nullum exemplum posse adduci, five 5. five 9. five 11 &c: terminorum, in quo plures sint Principales quam tres: qui vulgo erunt Causa Agens. Effectum. Causa Agens, Priori Causæ Homogenea, & cui annexa est quæstio, respiciens Secundum Effectum priori Homogeneum.

Reliqui autem termini, qui inter Causam Efficientem & illius Effectum five interpolantur, five qui ipsi adherent semper sunt circumstantiæ vel Medii quo, vel temporis in quo Causa Effectum producit.

Quæ omnes Circumstantiæ eo ordine in Causam Efficientem ducantur quo jam in Exemplis id factum videmus.

Notandum autem in Membro II rem eodem modo se habere quo in membro I.

Quo

Quo facto habebimus tantum quæstionem trium terminorum resolvendam, in qua

Causa Efficiens I.		Causa Eff. II	
per omnes suas	~	Effect. datum	=
circumstantias		per om. suas	
multiplicata		circumst: mul-	Eff.
		tiplicata	Q.

Ut autem inveniantur Proportiones simplices quæ propositas quæstiones resolvant, notetur hæc

Regula Generalis

Pro meris Proportionibus directis.

Causa I ~ Effectum I = Causa II / Effect. A
Subintelligendo omnes Circumstantias Causæ I.

Tum

Circumst. I ~ Effect. A = Circumst. I / Effect. B.
Causæ I. ~ Effect. A = Causæ II / Effect. B.

Seclusis Causis & reliquis Circumstantiis.

Deinde.

Circumst. II ~ Effect. B = Circumst. II / Effect. C.
Causæ I ~ Effect. B = Causæ II / Effect. C.

Seclusis Causis & reliquis Circumstantiis.

Tum

Circumst. III ~ Effect. C = Circumst. III / Effect. Q.
Causæ I ~ Effect. C = Causæ II / Quæsitum.

Quod si vero uti libeat una Regula Proportionis Inversa
& reliquis directis, viam monstrabit hæc.

Regula Generalis.

Causa I ~ Circumst. I = Causa II / Circumst. A. Hæc
Causæ I
semper
est In-
versa.

Seclusis omnibus reliquis.

Tum

Circumst. A ~ Effectum = Circumst. I / Effect. B.
Causæ I Causæ II
Seclusis omnibus reliquis.

Deinde,

Circumst. II. ~ Effect. B. = Circumst. II / Effect. C.
Causæ I Causæ II
Neglectis rursus omnibus reliquis.

Denique si non sint plures Circumstantiæ.

Circumst. Ult. ~ Effect. C. = Circumst. Ult. / Effect. Q.
Causæ I Causæ II
Quod quæ-
rebat.

Notandum autem est hæc duas Regulas generales esse
pro omnibus hujus Regulae quæstionibus quæ poterunt
proponi, ubi quæritur Effectum Causæ II.

Quod si vero quæreretur aut ipsa Causa II aut una ex illius
circumstantiis ad modum harum Regularum aliæ poterunt
inveniri. Illas autem nos, ne nimis prolixi simus, aliis in-
veniendas relinquimus,

De Regula dicta Catenaria.

Lemna.

Si proponantur duæ Columnæ Numerorum æque multorum, ita ut primus Columnæ I sit æqualis Primo Columnæ II.

Secundus Col: I ∞ Secundo Col: II.

Tertius Colum: I ∞ Tertio Colum: II.

Quartus Col: I ∞ Quarto Colum: II.

Et sic porro in infinitum.

Dico. Productum omnium Numerorum Columnæ I per se invicem multiplicatorum fore æquale Producto omnium Numerorum Columnæ II. similiter per se invicem multiplicatorum.

$$\begin{array}{r}
 \text{Sic } 2 \infty 2 \\
 3 \infty 3 \\
 4 \infty 4 \\
 5 \infty 5 \\
 \hline
 120 \infty 120 \\
 \text{Vel sic} \\
 2 \infty 1 + 1 \\
 3 + 3 \infty 6 \\
 5 \infty 3 + 2 \\
 \hline
 2 \text{ in } 3 + 3 \quad 1 + 1 \text{ in } 6 \\
 \text{facit} \quad \text{facit} \\
 6 + 6 \quad 6 + 6 \\
 \text{tum.} \quad \text{tum} \\
 5 \text{ in } 6 + 6 \quad 3 + 2 \text{ in } 6 + 6 \\
 \text{facit} \quad \text{facit} \\
 30 + 30 \infty 18 + 18 + 12 + 12 \\
 \text{hoc est } 60 \infty 60
 \end{array}$$

Demonstratio hujus Lemmatis deducitur ex alio Lemmate I quod supra ad Doctrinam Proportionum illustrandam adductum fuit. & sic sonat.

Quando duo æquales numeri per æquales numeros singuli multiplicantur tum duo illa producta sunt æqualia.

Corollarium.

Si jam loco cuius ex Numeris alterutrius Columnæ ponamus literam Q tanquam quantitatem quæsitam & incognitam, illam facile notam possumus reddere.

Sic sit 2 ∞ 2.

 3 ∞ 3.

 4 ∞ 4.

 Q ∞ 5.

 24 in Q ∞ 120.

$$Q \propto \frac{120}{24} \propto 5$$

Per multiplicationem utrimque factam invenitur 24 Q ∞ 120.

Qui numeri æquales si jam per eundem Numerum 24 dividantur, veniet ab una parte litera Q sola æqualis ab altera parte numero

$$\frac{120}{24} \propto 5, \text{ quemadmodum etiam } Q \text{ posita fuit}$$

Atque hoc est omne quod naturam & substantiam huius Regulæ constituit. Quare circa illam non meliori procedere poterimus via, quam si varia Exempla afferamus, & particulares si quæ occurrant observationes notemus.

Regula Generalis.

Concipe duas datorum Numerorum Columnas. & in una ex illis pone primum quem libuerit. & ipsi æqualem scribe primum in secunda.

Tum rursus in Columna I, secundum pone eum qui cum primo II Columnæ est ejusdem Denominationis, & ipsi ex adverso pone illum qui illi secundo est æqualis.

Deinde

De Regula dicta Catenaria. 249

Deinde in Columno I scribe tertium, qui est ejusdem denominationis cum secundo Columnæ II. & ei è regione qui datus ipsi æqualis. & sic porro, donec ultimus Columnæ II sit nomine ∞ primo Columnæ I.

Pro Numero autem incognito pone literam Q.

Tum numeros singularum Columnarum per se invicem multiplica. & productum Columnæ, ubi Q non invenitur, divide per productum alterius; quotiens erit Numerus quæsitus ∞ Q.

E X E M P L U M I.

Si 24 ₤ Amsterdami faciant 25 ₤ Antverpiæ; Et 100 ₤ Antverpiæ sint 107 ₤ Siviliæ; quæritur quot ₤ Siviliæ faciant 100 ₤ Amsterdami.

Quæstionis termini hunc in modum sunt ordinandi.

Amst. ₤ 24 ∞ 25 ₤ Antverp.

Antv. ₤ 100 ∞ 107 ₤ Siviliæ.

Sivil. ₤ Q ∞ 100 ₤ Amstel.

2400 Q ∞ 267500. Div. per 2400

Q ∞ $111\frac{11}{24}$

Notandum autem hic haud exigui momenti adhiberi posse compendium, si sint duo numeri in columnis oppositis, qui per eundem numerum possunt dividi; ista enim divisione peracta numeri per se invicem multiplicandi fiunt minores, adeoque Multiplicatio facilius instituitur; ut in hoc Exemplo.

Q 5

Amst.

Amst. $\text{ss } 24 \propto 25 \text{ ss Antv.}$

I

Antv. $\text{ss } 100 \propto 107 \text{ ss Sivil.}$

I

Sivil. $\text{ss } Q \propto 100 \text{ ss Amst.}$

$$24 \ Q \propto 2675.$$

$$Q \propto 111 \frac{11}{24}$$

Quia ab utraque parte reperiuntur Numeri 100, illis per 100 divisus utrimque ponantur quotientes 1 & 1. qui quia non multiplicant, utrimque tantum duo per se invicem sunt multiplicandi sc. ab una parte 24 in Q & ab altera parte 107 in 25. Ex quorum multiplicatione fit

$$24 \ Q \propto 2675.$$

Qui duo numeri colles divisi per eundem numerum 24, dabunt

$$Q \propto 111 \frac{11}{24}.$$

Cujus compendii ratio statim erit manifesta: si enim in Columnia I multiplicemus 24 per Q, & in Col. II 25 per 107. acquiremus $24 \ Q \propto 2675.$

Qui numeri aequales jam utrimque adhuc multiplicandi sunt per numeros aequales 100 $\propto 100$; quod, istis divisus per 100, idem est ac si debeant multiplicari per 1 $\propto 1$. adeoque retinentur fidei producti, quia unitas non multiplicat.

Potest autem eadem quaestio resolvi per duas Regulas Proportionis hoc modo.

Antw.

Antw. 96 Amst. 96 Antw. 96 Amst. 96
 $\frac{24}{96} \sim \frac{24}{96}$ $\frac{24}{96} \sim \frac{24}{96}$

Amst. 96 Siliv. 96 Amst. 96 Siliv. 96

4) 96 \sim 107 \sim 108 / $\frac{2675}{24} \infty 111 \frac{11}{24}$
 24 25 24 24
 ut requir.

EXEMPLUM II.

Si 96 96 Amstel. faciant 100 96 Antverpiæ. Deinde
 100 96 Antverpiæ, sint æqualla 120 96 Venetiis. Quæ-
 tur 360 96 Venetiis. quot 96 faciant Amstelodami.

Cujus termini hoc ordine disponi debent.

Amstel. 96 ∞ 100 96 Antw.

Antverp. 100 ∞ 120 96 Venet.

Venet. 360 ∞ Q 96 Amstel.

288 ∞ Q.

Quæ Quæstio unica Regula Proportionis hoc modo ab-
 solvitur.

Quia Amst. 96 ∞ 100 96 Antw. ∞ 120 96 Venet.
 Erit etiam Amst. 96 ∞ 120 96 Venetis.

Quare fiat.

Venet. 360 Amst. 96 Venet. 360 Amst. 96
 120) 720 \sim 96 \sim 360 | Q.
 1 3 3

Q ∞ 288 Numerus quæsitus.

EXEM-

E X E M P L U M III.

Quanti constabit ulna Dantiscana, si ulna Amstelodamensis constat $4\frac{1}{2}$ fl. hoc est 90 stuferis. Et cum 100 ulnæ Amstelodamenses faciant 102 ulnas Dantiscanas. Et 6 flor. Holl. seu 120 stuf. faciant 221 grossas Dantiscanas.

Termini sic ponantur.

Dantisc. ulnæ 102 ∞ 100 Ulnis Amst.
 Amstel. Ulna 1 ∞ 90 stuferis Holland.
 Stuferi Holland. 120 ∞ 221 grossis Dantif.
 Dantif. Grossæ Q ∞ 1 Ulna Dantiscana.

Vel etiam hoc modo.

Dantisc. Grossæ Q ∞ 1 Ulna Dantiscana.
 51 5
 Ulnæ Dantisc. 100 ∞ 100 Ulnis Amstel.
 45
 Ulna Amstel. 1 ∞ 100 Stuferis Holland.
 6
 Stuf. Holland. 120 ∞ 221 Grossis Dantiscanis.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l} 51 \\ 6 \end{array} \} M \quad \begin{array}{l} 45 \\ 5 \end{array} \} M. \\
 \hline
 \begin{array}{l} 306 \\ Q \end{array} \} M \quad \begin{array}{l} 225 \\ 221 \end{array} \} M. \\
 \hline
 306 Q \infty 49725. \\
 \text{Div. per } 306 \\
 \hline
 Q \infty 162\frac{1}{2}
 \end{array}$$

Quæ

De Regula dicta Catenaria. 253

Quæ questio per tres Regulas proportionis hoc modo solvi potest.

Ulnæ Amst. · Ulnæ Dantisc. Ul. A. / Ul. D.

$$100 \text{ ————— } 102 = 1 \quad \frac{51}{50} \propto 90 \text{ stuf. Holl.}$$

Tum

Stuf. Holl. Grossæ Dant. Stuf. Holl. Grossæ Dant.

$$100 \text{ ————— } 221 = 90 / \frac{663}{4}$$

Denique

Ulnæ Dantisc. Grossæ Dant. Ul. Dant. Grossæ

$$\frac{51}{50} \text{ ————— } \frac{663}{4} = 1 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Multip. per } 50. \\ \& \text{ tum per } 4. \\ \text{Terminum I \&} \\ \text{Secundum.} \end{array} \right.$$

204

33150 = 1

11

50

12712

33180

20444

200

2

204

2214

408

$$\left. \begin{array}{l} 12712 \\ 33180 \\ 20444 \\ 200 \end{array} \right\} 162 \frac{102}{204} \propto 162 \frac{1}{2} \text{ ut requir.}$$

EXEM.

E X E M P L U M I V.

Stuferis 3 enuntur 25 Pyra. Pyra 6 tantum valent quantum 9 Poma. Poma 3 sunt pretio æqualia 10 Prunis. & 50 Pruna tantum valent quantum 2 Castaneæ.

¶ Jam quaeritur quot Castan: constent 15 Stufferis.

Stuf. 3 ∞ 25 Pyra,

3 ∞ 6

Pyra 9 ∞ 3 Poma.

5

Poma 10 ∞ 3 Pruna.

25

Pruna 50 ∞ 2 Castan.

5

Castan. 100 ∞ 25 Stuf.

Q ∞ 25.

¶ Quod Exemplum Regulis Proportionis hoc modo resolvitur.

Pyra Stuf. Pyra Stuf.

25 ∞ 3 = 6 ∞ $\frac{18}{25}$. . . ∞ 9 Poma.

Poma Stuf. Poma Stuf.

9 ∞ $\frac{18}{25}$ = 3 ∞ $\frac{6}{25}$. . . ∞ 10 Poma.

Pruna Stuf. Pruna Stuf.

10 ∞ $\frac{6}{25}$ = 50 ∞ $\frac{6}{5}$. . . ∞ 2 Castan.

Cast.

88 Cast. Stuf. 88 Cast. Stuf.

$$2 \text{ — } \frac{6}{5} \therefore = Q / 15.$$

Adeoque erit per Theorema.

$$\frac{6}{5} Q \propto 30. \quad \text{D. per 6}$$

$$\frac{1}{5} Q \propto 5. \quad \text{M. per 5.}$$

$$Q \propto 25 \text{ ut requir.}$$

E. X E M P L U M V.

Quot Ulnæ Francofurtenfes faciunt 70 Ulnas Antverpienses? Si 5 Vlnæ Antverp. sint \propto 3 Vlnis Lugd. Galliæ. Et 24 Vlnæ Lugd. Galliæ faciant 35 Ulnas Viena. Et 7 Vlnæ Viena sint æquales. 10 Vlnis Francofurti.

Hujus Questionis termini ordine retrogrado satis commodè sic possunt disponi.

Ulnæ Francof. 70 \propto 7 Ulnæ Vien.

Vlnæ Vien. 35 \propto 4⁴ Ulnæ Lugd. Gall.

Uln. Lugd. Gall. 3 \propto 5 Ulnæ Antv.

Ulnæ Antv. 70 \propto Q Ulnæ Francof.

$$\frac{350 \propto 4 Q}{\text{—}} \quad \text{Div. per 4.}$$

$$87 \frac{1}{2} \propto Q.$$

Refo-

Resolutio per 3 Regulas Proportionis.

Ul. Vien. Ul. Franc. Ul. Vien. Vln. Fr.

$$\# \sim 10 \quad \frac{33}{50} \dots \infty 24 \text{ Ul. L. Gall.}$$

$$51$$

Uln. Lug. G. Uln. Franc. Ul. L. Gall. Uln. Franc.

$$\#\# \sim 50 \quad \frac{3}{8} / \frac{50}{8} \infty 5 \text{ Uln. Antv.}$$

Uln. Antv. Uln. Franc. Uln. Antv. Uln. Franc.

$$\# \sim \frac{10}{8} \quad \frac{70}{10} / \quad Q :$$

$$\frac{700}{8}$$

$$\text{Exit } Q \infty \frac{700}{8} \infty 87 \frac{1}{2} \text{ ut requir.}$$

E X E M P L U M VI.

Si 5 Ulnæ Antverpiæ faciant 3 Ulnas Lugduni Galliæ,
 Et 24 Ulnæ Lugd. Galliæ sint ∞ les 35 Ulnis Dantisci,
 Et adhuc 7 Ulnæ Dantisci faciant 10 Ulnas Parisiis.

Queritur $87 \frac{1}{2}$ Ulnæ Parisienses quot faciant Ulnas
 Antverpienses. ²

Vln. Antverp. $\# \infty \#$ Vlnæ Lug. Gall.
 8

Vln. Lugd. Gall. $\#\# \infty \#\#$ Vlnæ Dantisci.

Vlnæ

Vlna Dantisc. $\# \infty \frac{20}{100}$ Vlna Parisienses

Vlna Paris. $\# \frac{1}{2} \infty Q$ Vlna Antverp.

175

$$\frac{175}{8} = 1400$$

$$\frac{1400 \infty 20 Q}{70 \infty Q} \text{ Div. per } 20$$

Per Regulas Proportionum eadem Quæstio
sic resolvitur.

In omnibus terminus subintelliguntur vlna.

Lugd. Gal. Antv. Lugd. Gall. Antv.

$$3 \text{ } \sim \text{ } 5 = \frac{24}{8} / 40 \dots \infty 35 \text{ Dantisci.}$$

Dantisci Antv. Dantif. Antverp.

$$38 \text{ } \sim \text{ } 40 = \frac{1}{1} | 8 \dots \infty 10 \text{ Paris.}$$

Paris. Antv. Paris. Antv.

$$\begin{array}{l} 100 \text{ } \sim \text{ } 8 = 87 \frac{1}{2} \\ 200 \text{ } \sim \text{ } 2 = 70 \infty Q \\ 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} 175 \\ 2 \end{array}$$

$$\frac{175}{2} \text{ } \sim \text{ } M$$

$$D \left\{ \frac{380}{8} \right\} 70 \text{ ut supra.}$$

R

EXEM.

E X E M P L U M V I I.

Si 100 ℥ Genevæ faciant 108 ℥ Lugd. Galliæ. Et 100 ℥ Galliæ constat 30 Libris. 12 Solidus. 8 Grotis: Quæ-
rirur quanti constent 100 ℥ Genevæ.

Prius reducantur 30 Lib. 12 Solidi. 8 Grotæ ad Gro-
tas 7352.

Tum fiat.

℥ Genevæ	100	\propto	108	℥ Lugd. Gal.
℥ Lugd. Gall.	108	\propto	7352	Grotis.
Grotæ	Q	\propto	108	℥ Genevæ.

100 Q \propto 794016 Grotis.

Q \propto 7940 $\frac{4}{25}$ Grotis.

Quæ reductæ dabunt 33 Libras. 1 Solidum. 8 $\frac{4}{25}$ Grotas.

7	3	5	2	
	1	0	8	
<hr/>				
5	8	8	16	
7	3	5	20	
<hr/>				
7	9	4	0	16
			0	0
hoc est				7 9 4 0
				8
				16
				<hr/>
				100
7	9	4	0	$\frac{4}{25}$ grotis

C A P. V I.

De Regula Societatis Simplici.

CV M inter Mercatores (a quibus hæc Regula nomen adepta est) non raro obtineat, ut plures spe lucri adducti. Societatem ineant & in commune commodum singuli aut æqualem aut inæqualem expendant pecunia Summam, qua negotientur ea conditione, ut si collata summa aliquid lucretur, illud secundum proportionem collatorum nummorum inter socios distribuatur.

Huic distributioni dicta inservit Societatis Regula, quæ cum præter mercaturam, non uni tantum rei applicari possit, magni poterit etiam esse usus.

Docet numerum datum, in partes dividere datis numeris pluribus proportionales, adeoque propemodum nihil aliud est quam Regula Aurea seu Proportionis sæpius repetita; quare ex superioribus traditis operatio quam præscribit facile intelligetur, maxime vero Exemplis adhibitis.

Quæ duplici modo possunt proponi.

Aut enim collatæ ab unoquoque Summæ additur determinatum aliquod temporis spatium, per quod pecunia collata est, adeoque Lucrum aut Damnum distribuendum est non tantum ratione pecuniæ expositæ, sed etiam respectu temporis.

Aut simpliciter tantum sine tempore pecunia nominatur, præsupposito omnes socios ab initio simul contraxisse fœdus, atque adeo æque diu ejusdem Societatis fuisse membra.

Hinc est quod pro duplici isto Casu duplex etiam inventa est

Deinde.

$$\frac{170}{1000} \sim 12000 = \frac{1}{20}$$

feu

$$34\phi\phi \sim 12000 = 10\phi\phi / \frac{120000}{34} \propto 3529 \frac{7}{17}$$

Deinque

$$\frac{170}{1000} \sim 12000 = \frac{1}{50}$$

feu

$$85\phi\phi \sim 12000 = 10\phi\phi / \frac{120000}{85} \propto 1411 \frac{13}{17}$$

$$11998 \frac{34}{17}$$

hoc est

$$12000$$

ut requiritur.

E X E M P L U M IV.

Tres ineunt Societatem. C & B simul expendunt 1300 flor. B & C 1500 flor. C & A 1400 flor. & fecerunt lucrum flor. 450. Quæritur cuiusque collata pecunia & Lucrum.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pecunia collata, A \& B 1300} \\ \text{B \& C 1500} \\ \text{C \& A 1400} \end{array} \right\} A$$

Abis

	• A. bis. B. bis. 4200. C. bis. <hr style="width: 100%;"/> A. B. C. 2100.				
Semissis	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 33%; text-align: center;"> A. B. C. 2100. <hr style="width: 100%;"/> A B 1500 <hr style="width: 100%;"/> C 800. </td> <td style="width: 33%; text-align: center;"> A B C 2100. <hr style="width: 100%;"/> B. C. 1500 <hr style="width: 100%;"/> A 600 </td> <td style="width: 33%; text-align: center;"> A B C. 2100. <hr style="width: 100%;"/> A C 1400 <hr style="width: 100%;"/> B 700. </td> </tr> </table>	A. B. C. 2100. <hr style="width: 100%;"/> A B 1500 <hr style="width: 100%;"/> C 800.	A B C 2100. <hr style="width: 100%;"/> B. C. 1500 <hr style="width: 100%;"/> A 600	A B C. 2100. <hr style="width: 100%;"/> A C 1400 <hr style="width: 100%;"/> B 700.	
A. B. C. 2100. <hr style="width: 100%;"/> A B 1500 <hr style="width: 100%;"/> C 800.	A B C 2100. <hr style="width: 100%;"/> B. C. 1500 <hr style="width: 100%;"/> A 600	A B C. 2100. <hr style="width: 100%;"/> A C 1400 <hr style="width: 100%;"/> B 700.			

Tum fiat juxta Regulam.

<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: right;">A 600</td> <td rowspan="3" style="font-size: 3em; vertical-align: middle;">}</td> <td rowspan="3" style="vertical-align: middle;">A 2100 ~ 450 =</td> <td rowspan="3" style="font-size: 3em; vertical-align: middle;">{</td> <td style="text-align: left;">600/128 $\frac{4}{7}$</td> <td rowspan="3" style="font-size: 3em; vertical-align: middle;">}</td> <td rowspan="3" style="vertical-align: middle;">A</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">B 700</td> <td style="text-align: left;">700/150</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">C 800</td> <td style="text-align: left;">800/171 $\frac{3}{7}$</td> </tr> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; text-align: right;">2100</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="border-top: 1px solid black; text-align: left;">450</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	A 600	}	A 2100 ~ 450 =	{	600/128 $\frac{4}{7}$	}	A	B 700	700/150	C 800	800/171 $\frac{3}{7}$	2100				450			
A 600	}				A 2100 ~ 450 =			{	600/128 $\frac{4}{7}$	}	A								
B 700									700/150										
C 800		800/171 $\frac{3}{7}$																	
2100				450															

E X E M P L U M V.

Duo faciunt Societatem. A confert 400 Florenos. B 400 Taleros: & hac pecunia Lucrantur 60 Florenos, de quibus pro sua parte A sumit 24 Florenos. Queritur quot stufferotum Talerus sit æstimatus.

Si a totò Lucro 60 Flor. dematur Lucrum A 24 Flor. remanebit Lucrum B 36 Flor.

Quia jam Lucra sunt proportionalia Numeris collatis, erit.

Lucrum A. Flor. collat. A	Lucrum B.	Flor. collati B
24 ~ 400 = 36		venit 600. 30
2 200 3		400 Tal.
	R 4	Tum

Tum fiat.

Taleri faciunt Florenos Taleri Flor.

$$400 \sim 400 = 24 \quad / \quad 36. \quad \frac{6}{4} \infty 1 \frac{1}{2} \text{ h. e. } 30 \text{ stuferos.}$$

Alio modo.

A	B	
Flor.	Taleri	Lucr. A. Lucr. B.
400	400	= 24 / 36.
1	1	= 24 / 36.
20	Q	= 24 / 36.
5 0	6
... 1	...
...
30 ∞ Q.		ut supra.

Prioribus terminis divis per 400
Cum unus florenus faciat 20 stuferos, ponatur unus Talerus facere Q stuferos.

E X E M P L U M VI.

Tres debent dividere 158 flor. 15. stuferos, ita ut I. accipiat $\frac{1}{2}$. II. $\frac{1}{3}$. III $\frac{1}{6}$.

Quia 15 stuferos sunt $\infty \frac{3}{4}$ flor. erit summa dividenda 158 $\frac{3}{4}$ fl: hoc est $\frac{635}{4}$ flor.

Tum

Tum fiat

$$\begin{array}{l}
 \text{A} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \mid \frac{6}{3} \\ \frac{1}{3} \mid 2 \\ \frac{1}{6} \mid \frac{1}{6} \propto 1. \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 1 \sim 158 \frac{3}{4} = \frac{1}{2} / 79 \frac{3}{8} \text{ h. e. } 79 \text{ fl.} \\
 \qquad \qquad \qquad 7 \frac{1}{2} \text{ fl.} \\
 \\
 1 \sim 158 \frac{3}{4} \quad \frac{1}{3} / 52 \frac{11}{12} \text{ fl. h. e. } 26 \text{ fl.} \\
 \qquad \qquad \qquad 18 \frac{1}{3} \text{ fl.} \\
 1 \sim 158 \frac{3}{4} = \frac{1}{6} / 26 \frac{11}{14} \text{ fl. h. e. } 26 \text{ fl.} \\
 \qquad \qquad \qquad 9 \frac{1}{6} \text{ fl.}
 \end{array}$$

Proba.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Flor. } 79 & \text{---} & 7 \frac{1}{2} \text{ Stuf.} \\
 52 & \text{---} & 18 \frac{1}{3} \text{ Stuf.} \\
 26 & \text{---} & 9 \frac{1}{6} \text{ Stuf.}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} 79 \\ 52 \\ 26 \end{array}} \right\} \text{A}$$

$$\text{Flor. } 158 \text{ --- } 15 \text{ Stuf. ut requir.}$$

E X E M P L U M VII.

Tres Mercatores A. B. C. Societatem constituunt.
 A. confert. 200 fl. B 300. C. 400. Et simul lucrantur
 florenos 450. Quæritur quantum quilibet ex isto Lucro
 debeat accipere.

$$\begin{array}{r} A \ 200 \\ B \ 300 \\ C \ 400 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} A \\ B \\ C \end{array}} \right\} A \quad \begin{array}{c} 888 \\ 1 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} 444 \\ 50 \end{array} = 288 / 100. \text{ Lucrum A.}$$

$$\begin{array}{r} 900 \\ \hline \end{array} \quad \text{Deinde}$$

$$\begin{array}{r} \text{Pecunia col-} \\ \text{collata. om-} \\ \text{nium.} \end{array} \quad \begin{array}{c} 888 \\ 1 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} 444 \\ 50 \end{array} = 388 / 150 \text{ Lucrum B.}$$

Denique

$$\begin{array}{c} 888 \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} 444 \\ \hline \end{array} = 488 / 200 \text{ Lucrum C.}$$

$$\underline{\underline{450 \text{ ut requir.}}}$$

E X E M P L U M VIII.

Pater moriens tale Uxori & quatuor filiis reliquit testa-
 mentum.

Si Uxor ex meis bonis habeat florenos	100.	tum fi-
Natu maximus habebit	80.	lius me-
Secundus	70.	us
Tertius	60.	
Quartus	50.	

Jam autem comperitur Patrem reliquisse in bonis 8000
 florenos quæritur ; quot floreni singulis debeant nume-
 rari.

Ope.

Operandum est hoc modo.

$$\begin{array}{l} 100 \\ 80 \\ 70 \\ 60 \\ 50 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 100 \\ 80 \\ 70 \\ 60 \\ 50 \end{array}} \right\} A$$

$$\begin{array}{r} 36\phi \sim 8000 = 100 / \frac{80000}{36} \infty 2222 \frac{2}{9} \text{ Pro Ma-} \\ \hline 360 \end{array}$$

tre,

Deinde.

$$360 \sim 8000 = 8\phi / \frac{64000}{36} 1777 \frac{7}{9} \text{ Pro filio}$$

natu
maximo.

Tum

$$36\phi \sim 8000 = 7\phi / \frac{56000}{36} \infty 1555 \frac{5}{9} \text{ Pro Filio}$$

Secundo

Postea.

$$36\phi \sim 8000 = 6\phi / \frac{48000}{36} \infty 1333 \frac{3}{9} \text{ Pro filio}$$

Tertio.

Denique

$$36\phi \sim 8000 = 5\phi / \frac{40000}{36} \infty 1111 \frac{1}{9} \text{ Pro filio}$$

natu
maximo.

8000 ut requir.

EXEMPLUM IX.

Quatuor mercatores I. H. K. L. cum mercibus mittunt navem in Hispaniam: quæ in itinere facit sumptus flor. 300: Quæritur quantum quisque solvere debeat;

Si I solvat duplum ipsius H.
K dimidium H & I.
L triplum H.

Ponæ

Ponatur solvere debere

$$\begin{array}{l} \text{I} \dots \text{I} \\ \text{Ergo H} \quad \frac{\text{I}}{2} \end{array} \quad \text{adeoque H \& I} \quad \frac{\text{I}}{2} \cdot \frac{3}{2}$$

$$\text{Vnde K} \dots \frac{3}{4}$$

$$\text{L} \quad \frac{3}{2}$$

$$\text{Summa} \quad \frac{15}{4}$$

$$\text{Omnium} \quad \frac{4}{4}$$

Tum fiat

$$\frac{15}{4} \sim 300 = 1/$$

feu

$$15 \sim 1200 = 1/80 \text{ pro I.}$$

NB.

Invento debito ipsius
10080. facile reliqua
ex datis quaestionis in-
veniri possunt.

$$\text{H solvit} \frac{1}{2} \text{ I. } \infty 40.$$

$$\text{K solv.} \frac{1}{2} \text{ H \& I } \infty 60$$

$$\text{L solvit } 3 \text{ H } \infty 120$$

Deinde.

$$\frac{15}{4} \sim 300 = \frac{1}{2}$$

feu

$$30 \sim 1200 = 1/40 \text{ pro H.}$$

Tum.

$$5 \frac{88}{4} \sim 300 = \frac{8}{4} / 60 \text{ pro K}$$

Denique

$$5 \frac{18}{4} \sim 300 = \frac{8}{4}$$

feu

$$5 \sim 600 = 1/120 \text{ pro L.}$$

300 ut req.

EXEM-

EXEMPLUM X.

Equites 8. Pedites. 20 Bombardarii 12. divere debent prædam 236 flor. ea conditione ; ut 2 Equites tantum accipiant quantum 5 Pedites. Deinde ut 6 Pedites talem portionem sibi vindicent, qualem 10 Bombardarii. Quæritur quantum 8 milites, 20 Pedites & 12 Bombardarii accipere debeant.

Datur Portio	Deinde portio.	Denique Portio
Equit. Pedit.	PedPed itum	Pedit. Bombard.
<u>2 ∞ 5. M. p.4</u>	<u>20 ∞ 20</u>	<u>6 ∞ 10 D. p.10</u>
		$\frac{6}{10} \int \frac{3}{5} \infty 1.$
8 ∞ 20		<u>36</u> M. p.12
		$\frac{36}{5} \infty 12$

Post quam reductionem idem est ac si prædam divisuri essent 20 Milites. 20 Milites $\frac{36}{5}$ & Milites. Quare divisio per hanc Regulam Societatis tali modo peragitur.

20 f. $\frac{100}{5}$	} A $\frac{236}{8} \sim 236 = \frac{100}{5} / 100$ pro Equitibus 8	Fiat
20 f. $\frac{100}{5}$		
$\frac{36}{5}$		
$\frac{36}{5}$		
Summ. $\frac{236}{5}$	$\frac{236}{8} \sim 236 = \frac{100}{5} / 100$ pro Peditibus 20.	

Deni-

Denique

$$\frac{236}{x} - 23x = \frac{36}{x} / 36. \text{ pro 10 Bombard.}$$

Somma trium portionum $\frac{236}{x}$ ut requiritur.

EXEMPLUM XI.

Maritus moriens uxorem relinquit gravidam, & tale Testamentum facit.

Si Uxor pariat filium, ut ille $\frac{3}{4}$ totius Hæreditatis habeat, reliqua matri cedant.

Si vero filiam peperit, illa $\frac{1}{4}$ & mater reliqua habeat;

Sed mater & filium & filiam producit.

Quæritur, si relictæ sint 4800 fl. quantum cuique debeatur

Ex verbis testamenti patet hæreditatem debere hac proportionem dividi,

Ut Filius habet triplum portionis Maternæ. ex conditione I.

Mater vero triplum portionis Filia. ex conditio II.

Quare si ponemus accipere

Filius 9.	}
Habebit Mater 3.	
Adeoq. Filia 1.	

13.

Igitur

Igitur fiat.

$$13 \curvearrowright 4800 = 9 / \text{venit } 3323 \frac{1}{13} \text{ pro Filio.}$$

Tum

$$13 \curvearrowright 4800 = 3 / \dots 1107 \frac{9}{13} \text{ pro Matre.}$$

Denique

$$13 \curvearrowright 4800 = 1 / \dots 369 \frac{3}{13} \text{ pro Filia.}$$

4800 ut requir.

CAPVT VII.

De Regula Societatis Composita sive cum Tempore.

HIC ut supra dictum est, præter diversitatem fortis congestæ, accedit etiam diversitas temporis, ita ut hic sit ratio composita ex ratione fortis ad sortem, & ratione temporis ad tempus.

Quare multiplicandæ erunt singulæ sortes in suum tempus. Et numerorum sic factorum Summa constituet terminum Primum. Iidemque sigillatim positi totidem constituent terminos tertios. Ipsumque Lucrum sive damnum terminum Secundum.

EXEMPLUM I.

Tres Mercatores Lucrati sunt florenos 30. Primus A contulit 60 florenos per 4 menses. Secundus B 50 per 3 menses. Tertius C contulit 30 per 2 menses; Quantitur
quan-

quantum singulis habita ratione & sortis & temporis ex communi isto lucro debeatur.

Menses.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{A. } 60 \text{ per } 4 \infty 240. & & \\
 \text{B } 50 \text{ per } 3 \infty 150. & \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{A. } 60 \text{ per } 4 \infty 240. \\ \text{B } 50 \text{ per } 3 \infty 150. \\ \text{C } 30 \text{ per } 2 \infty 60 \end{array}} \right\} 450 \text{ --- } 30 & \left\{ \begin{array}{l} 240 / 16. \text{ pro A} \\ 150 / 10 \text{ pro B.} \\ 60 / 4 \text{ pro C.} \end{array} \right. \\
 \text{C } 30 \text{ per } 2 \infty 60 & & \\
 \hline
 450 & & 30 \text{ ut requir.}
 \end{array}$$

Cujus operationis veritas eodem modo, quo prius examinari potest per additionem singulorum lucrorum in unam summam ejusdemque cum lucro dato comparatione.

Quod autem multiplicatio pecuniæ in tempus non mutet valorem datorum, patet ex Demonstratione Regulæ proportionis compositæ.

Perinde enim est, siue A conferat flor. 60 per 4 menses, siue 240 flor: per unum mensem. Ut & siue B 50 per 3. siue 150 per unum. Denique siue C 30 per 2 siue 60 per unum.

Quare jam 6 termini dati videlicet tres fortes diversæ & tria tempora diversa, reducti sunt ad tres; ita ut hujus quæstionis solutio sit una eademque cum operatione Regulæ Auræ simplicis.

E X E M P L U M I I.

Tres Mercatores lucrati sunt florenos 9000.

Primus A contulit flor: 100 per menses 16.

Secundus B ----- 140 ----- 10.

Tertius C ----- 300 ----- 7.

Quæ-

De Regula Societ. Composita. 273

Quæstio sic erit solvenda.

Menses

A. 100 p 16 ∞ 1600.		1600 / 2823 $\frac{27}{51}$ A
B 140 p 10 ∞ 1400.	5100 ~ 9000	1400 / 2470 $\frac{30}{51}$ B
C 300 p 7 ∞ 2100.		2100 / 3705 $\frac{45}{51}$ C
	<u>5100</u>	<u>9000 ut req.</u>

EXEMPLUM III.

Trea Mercatores A. B. C. merces suas conjunctim vehi curant, pendentes 200 Centenarios.

Ipsius A merces vehuntur milliaria 36 pro 24 florenis.

B - - - - - 42 -- 28 flor.

C - - - - - 34 -- 36 flor.

Quæritur Centenariorum numerus cujusque Mercatoris.

A. 36 per 24 ∞ 864	} A
B 42 per 28 ∞ 1176	
D 34 per 36 ∞ 1224	
<u>3264</u>	

Tum fiat.

$$3264 \sim 200 \sim 864 \quad / \quad \frac{172800}{3264} \sim 52 \frac{16}{17} \text{ Centenarii A.}$$

$$\frac{200}{172800}$$

S

Deinde

Deinde.

$$3264 \sim 200 = 1176 \quad / \quad \frac{235200}{3264} \propto 72 \frac{1}{17} \text{ Centen. B.}$$

$$\frac{200}{235200}$$

Denique

$$3264 \sim 200 = 1224 \quad / \quad \frac{244800}{3264} \propto 75 \text{ Centen. C}$$

$$\frac{200}{244800} \quad \frac{200 \text{ ut requir.}}{200}$$

E X E M P L U M IV.

A & B societatem faciunt. A confert 800 flor. per 6 mensibus. Quæritur per quot menses B debeat conferre 600 florenos, ut accipiat $\frac{2}{3}$ lucri.

Quæstio hunc in modum solvenda.

Flor. Mens.

A. 800. per 6 \propto 4800. Cum jam lucra singulorum sint proportionalia impensis singulorum per sua tempora multiplicatis: Sit autem Lucrum B $\frac{2}{3}$ / erit Lucrum

$$A \quad \frac{1}{3}$$

Quare fiat.

Lucrum A	Impensæ A per tempus multipl.	Lucr.	Impensæ B per templus multipl.
$\frac{1}{3}$	~ 4800	$= \frac{2}{3}$	/ 9600

Quæ

De Regula Societ. Composita. 275

Quæ inventa 9600 si per pecuniam collatam 600 dividatur veniet tempus quæsitum 16 mensium.

NB.

Illa Operatio clarius poterit videri quando hoc modo procedimus.

Flor.	Mens.	Fiat jam.
A 800 p 6 ∞ 4800		Lucrum A.
B 600 p Q ∞ 600 Q.		
		$\frac{1}{3} \sim 4800 = \frac{2}{3} / 600 Q.$
		$9600 \infty 600 Q.$
		$16 \infty Q.$

E X E M P L U M V.

A & B societatem ineunt. A confert 320 flor. pro 6 mensibus. Quæritur, quando B. debeat interesse Societati, si couferat 480 flor. ut ipsius lucrum sit æquale Lucra A.

Sors Mens.
A. 320 pro 6 ∞ 1920.

Quia ponitur utriusque lucra esse æqualia, etiam utriusque nummi collati erunt æquales. Adeoque Sors ipsius A per suum tempus multiplicata erit æqualis Sorti B similiter per suum tempus multiplicata.

Quare si 1920 dividatur per sortem B 480, veniet pro mensibus quæsitis Numerus 4.

$$\left. \begin{array}{r} 1920 \div 480 \\ 4 \end{array} \right\} 4 \text{ Menses quæsi.}$$

S 2

EXEM

E X E M P L U M V I.

Duo iterum Societatem faciunt.

A confert 300 fl. pro 4 mensibus. Quæritur quot florenos conferre debeat B pro 6 mensibus, ut ambo æquale faciant Lucrum.

A. 300 per 4 \propto ~~1200~~ } 200 Sors quaesita.
~~800~~

E X E M P L U M V I I.

Tres A. B C. instituunt Societatem.

A confert Florenos 200. & post 16 menses adhuc flor 120.

B adjungit florenos 400. & post 6 menses aufert iterum flor. 100.

C confert florenos 200 & post 12 menses adhuc flor. 200.

Tum finitis tribus annis comperiunt lucrum florenorum 600.

Quæritur quantum ex eo singulis debeat.

Quæ quaestio hinc in modum tractanda.

Annus continet 12 menses, ergo tres Anni 36.

Pro A.

Flor. Menses,

A. 200 per 36 \propto 7200 } Ad.
 120 per 20 \propto 2400 }

Summa ducta in tempus \propto 9600

Pro

EXEMPLUM VIII.

Tres Mercatores A. B. C. in commune conferunt. A 3000 Flor. B 5000. C 6000. ea conditione ut post 8 annos lucrum æqualiter dividant. Contingit autem ut finitis 6 annis ex pacto societatem dissolvant, & lucrati sint 4200 flor.

Quæritur quantum ex eo singulis competat.

Sors	Anni.	Sors	Anni.
A. 3000 per 8	∞ 24000	B 5000 per 8	∞ 40000
3000 per 2	∞ 6000	5000 per 2	∞ 10000
Sors collata	18000	Sors pro 6	30000
pro 6 annis.		annis.	

Sors	Anni
C 6000 per 8	∞ 48000
6000 per 2	∞ 12000
	36000

Quia jam ex pacto inter illos lucrum 4200 fl. æqualiter divideretur si societas stetisset per 8 annos, quilibet ex isto lucro recepisset. 1400 fl. At vero duravit tantum 6 annos; pro quibus in ista æquali divisione singuli accipiant 1050. quod sic patet. mens

$$8 \text{ ————— } 1400 = 6 / 1050$$

Ergo	A	1050	} A.
	B	1050	
	C	1050	

3150, qui deficient à toto Lucro per 1050 fl. qui inter illos tres, juxta eorum sortes, in tempora ductas dividi debent; hoc est juxta proportionem Numerorum 18000. 30000. 36000, seu 3. 5. 6. omnibus divisus per 6000.

Quare

De Regula Societatis Composita. 279

Quare fiat

$$\begin{array}{l} \text{A } 3 \\ \text{B } 6 \\ \text{C } 6 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{A } 3 \\ \text{B } 6 \\ \text{C } 6 \end{array}} \right\} \text{A.}$$

$$\begin{array}{r} 14 \overline{) 1050} = 3 / 3150 \infty \frac{225}{1050} \} \text{Adde} \\ \underline{ 3} \\ 3150 \end{array}$$

$$\frac{1275}{14} \text{ Lucr. A.}$$

$$\begin{array}{r} 14 \overline{) 1050} = 5 / 5250 \infty \frac{375}{1050} \} \text{A} \\ \underline{ 5} \\ 5250 \end{array}$$

$$\frac{1425}{14} \text{ Lucr. B.}$$

$$\begin{array}{r} 14 \overline{) 1050} = 6 / 6300 \infty \frac{450}{1050} \} \text{A} \\ \underline{ 16} \\ 6300 \end{array}$$

$$\frac{1500}{14} \text{ Lucr. C}$$

Tria Lucra simul faciunt 4200 ut requir.

E X E M P L U M IX.

Mercator quidam pecuniam debet tribus Creditoribus
A. B. C.

Cred. A, Lib. Solid. Grotas.

236 — 15 — 6. hoc est 56826 Grotas.

Cred. B L. Sol. Grotas.

319 — 17 — 6. hoc est 76770 Grotas.

Cred. C L Sol. Grot.

217 — 17 — 8 hoc est 52292 Grotas.

185888 Grot. totum debet.

Post mortem autem debitoris in bonis tantum reperiuntur.

Librae Sol. Grotæ.

451 — 17 — 1. hoc est 108452. Grotæ.

S 4

Quæ-

Quæritur qua summa singuli, iusta proportionē habita,
debeant esse contenti.

Fiat jam.

Totum debit.

Grotz Tota hæreditas Debit. A
185888 \sim 108452 \equiv 56826 / Venit Portio A

Tum Deb. B
185888 \sim 108452 \equiv 76770 / Venit Portio B

Denique Deb. C
185888 \sim 108452 \equiv 52292 / Venit Portio C

Exemplum facilioris Calculi adjungimus sequens.

Quidam debeat Creditori A 1000 Et habet tantum
B 3000 in bonis 6000 fl.
C 8000 Quæritur cujus.

Totum debitum 12000

12000 \sim 6000 \equiv 1000 / $\frac{6000}{12}$ \propto 500 Portio A

12000 \sim 6000 \equiv 3000 / $\frac{6000}{4}$ \propto 1500 Portio B
4 1

12000 \sim 6000 \equiv 8000 / .. \propto 4000 Portio C
500

EXEMPLUM X.

Duo simul lucrati sunt 100 florenos, ex quo lucro unus
debet sibi habere $\frac{1}{4}$ plus quam alter.

Si

De Regula Societatis Composita. 281

Si ponamus Unum recipere 1 alter habebit $\frac{1}{4}$, qui simul additi facient $2\frac{1}{4}$ seu $\frac{9}{4}$.

Tum fiat.

$$\frac{9}{4} \sim 100 = \frac{4}{4} / \text{venit } 44\frac{4}{9} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Portio unius} \\ \\ \end{array} \right\} A$$

$$\frac{4}{4} \sim \left\{ 44\frac{4}{9} \right.$$

Deinde.

$$\frac{9}{4} \sim 100 = \frac{5}{4} / \text{venit } 55\frac{5}{9} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{Port. alterius} \end{array} \right\}$$

$$\frac{5}{4} \sim \left\{ 55\frac{5}{9} \right.$$

$$\frac{100}{9}$$

CAPUT VIII.

De Regula Alligationis.

CUM sæpissime in humano commercio obtineat, ut diversæ mercaturæ inæqualium pretiorum ita debeant misceri, ut mixtum possit emi vel vendi pretio inter miscendorum pretia medio; etiam istam commiscendi methodum ope sua destituere noluerunt Mathematici, ut sic ab omni parte ipsorum industria publico prodesset.

Illi autem huic mixtioni nomen dederunt Alligationis; quia diversa pretia reducunt & quasi alligant ad unum pretium quod inter reliqua est medium.

Notandum est illa pretia quæ ad unum aliquod pretium

alligantur, dici pretia Extrema. Illud vero ad quod ea alligantur dici Pretium Medium.

Quæ alligatio pro diversa datorum vel quæſitorum Ratione etiam variatur & non ſemper eodem modo ſe habet.

Aut enim Extrema ſunt data & Medium quæritur.

Aut medium cum uno aut pluribus Extremis data ſunt, & alterum aut reliqua Extrema quæruntur.

Aut medium datur. & Extrema quæruntur in quantitate ſua.

Cafus I.

Ubi Extrema ſunt data, & Medium Quæritur.

E X E M P L U M I.

Mercator, habet duas ſpecies frumenti, ſc. triticum & Siliginem.

Modius tritici conſtat 16 ſtuferis; & Siliginis 12 ſtuferis; iſtos duos modios vult miſcere; quæritur pretium Modii mixti.

Modius	Pret. ſt.
1 ———	16
1 ———	12
} A .	
2 ———	28

Tum fiat.

Modii	Pret. ſtuſ.	Modius
2	28	1 / 14
1	14	

Quæ regula Proportionis adhibita eſt, ut indicetur pretium

De Regula Alligatiouis. 283

tium duorum modiorum sc. 28, debere dividi per numerum modiotum sc. 2, ut acquiratur pretium medium quæsitum 14 pro uno modio.

E X E M P L U M II.

Coctor Cerevisiarius habet 5 pretio diversas cerevisiæ species, sc. Dolium 1. pretii 8 flor. Dolium 1 pretii 6 fl. Dolium 1 pretii 4 flor. Dolium 1 pretii 2 flor. & denique Dolium 1 pretii 1 floren.

Dolia Pret.

A	$\left\{ \begin{array}{l} \text{—} 8 \\ \text{—} 6 \\ \text{—} 4 \\ \text{—} 2 \\ \text{—} 1 \end{array} \right\}$	A	$\frac{21}{5} / 4\frac{1}{5} \text{ flor. sc. } 4\frac{1}{5}$ 4 fl. pretium medium quæsitum.
	<hr style="width: 100%;"/> $\frac{5}{21}$		

Summa omnium pretiorum 21, divisa per summam doliorum dabit pretium quæsitum unius dolii mixti.

E X E M P L U M III.

Oenopola tria diversa habet vina, A. B. C, quæ vult miscere. Ex vino A (cujus vas constat 100 flor.) vult sumere 1 vas. ex Vino B. (cujus vas constat 80 fl.) sumere vult Vasa 2. Ex Vino (cujus vas constat 60 flor.) reliquis miscet Vasa 4.

Quæritur pretium Vasis unius ex vino isto mixto.

Vasa

Vasa.

Pretia

ad

1	100	∞	100.	} A	x13 { 71 $\frac{3}{7}$ flor. # # Pretium medi- um quæsitum.
2	80	∞	160.		
4	60	∞	240.		
6	500.				

Venit Vini mixti

$$1 \text{ ————— } \frac{500}{7} \infty 71 \frac{3}{7}$$

Casus II.

Ubi Medium cum uno Extremo plenarie (id est cum numero partium & pretio) datum est, & alterum extremum quæritur.

E X E M P L V M IV.

Coctor Cerevisarius habens 20 dolia cerevisiæ, cujus unum dolium constat 8 flor. Quæritur quot dolia, cerevisiæ 3 flor. debeat prioribus doliis admiscere, ut mixtæ dolium constet 5 flor.

D

A Majus pr. 8. 2. Def. pretii minoris a medio, ascribendus majori.

Med. pret. 5 B

C Minus pr. 3

3. Excessus majoris pretii supra medium, ascribendus pretio minori.

E

Qui defectus 2 & Excessus 3 significant, ad instituentam mixturam quæsitam: si ex cerevisia majoris pretii sumantur dolia 2, ex altero minoris pretii capienda esse 3 dolia.

Jam

De Regula Alligationis.

285

Jam autem quæstio dicit majoris pretii samta esse 20 dolia, & quæritur Numerus doliorum minoris pretii.

Quare fiat per Regulam Proportionis.

$$2 \text{ } \smile \text{ } 3 = 20 / \text{ \& venit } 30 \text{ pro numero doliorum cerevisiæ minoris pretii.}$$

Examen & Proba.

Dolia

$$\begin{array}{r} 20 \text{ ————— } 8 \propto 160 \\ 30 \text{ ————— } 3 \propto 90 \\ \hline 50 \qquad \qquad 250 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 20 \\ 30 \\ 50 \end{array}} \right\} A$$

Dolia

$$\begin{array}{r} 50 \\ 5. \text{ pret. med.} \\ \hline 250 \end{array}$$

Hinc pro hoc Casu deducitur

Regula.

I. Pretia data, sc. majus & minus, seu extrema supra se invicem scribe, (ut A & C) & Medium in medio ad sinistram (ut B.)

II Differentiam pretii minoris (C) a medio (B) (sc. D.) pone juxta pretium majus (A)

At vero Differentiam pretii majoris (A) supra medium | B, sc. E scribe juxta pretium minus (C.)

III. Tum si datus sit numerus partium ex specie pretii majoris,

Fiat. $D \text{ } \smile \text{ } E = \text{ut Numerus datus} / \text{Ad quæsitum.}$

Vel si datus sit numerus partium ex specie pretii minoris.

Fiat. $E \text{ } \smile \text{ } D = \text{ut Numerus datus} / \text{Ad quæsitum.}$

Quem-

Quemadmodum si in præcedentes Exemplo datus fuisset numerus 30 doliorum cerevisiæ minoris pretii, & numerus doliorum alterius cerevisiæ quæreretur, sic poneretur.

$$3 \sim 2 = 30 \text{ \& inveniretur } 20.$$

Corollarium. ex præced. Exemplo.

Quod si aquam loco Cerevisiæ 3 flor. voluisset admiscere Coctior Cerevisiarius, quæritur quot dolia debuisset addere, ut mixti dolium valeat 5 flor.

$$\begin{array}{r} 8 \overline{) 5} \\ 0 \end{array} \quad \text{Quare fiat } 5 \sim 3 = 20 / \frac{60}{5} \text{ sũ } 12 \text{ Dolia aquæ.}$$

EXEMPLUM V.

Aurifaber habet 12 Marcas argenti, cujus una Marca valet 10 denarios. Quæritur quantum æris isti argento debeat admiscere ut mixti merca constet 8 denariis.

Notandum hic poni æs nullius pretii.

Pret. 10 | 8 differentia pretii minoris a medio.

majus

8 Medium

Pet. 0

minus.

2 differentia pretii majoris supra medium.

Quare juxta Regulam fiat.

$$8 \sim 2 = 12 / \text{venit } 3. \text{ pro marcis æris admiscendi,}$$

EXEM-

Casus I I I.

Ubi datur pretium medium, & pretia Extrema; quaeruntur vero partes rerum miscendarum.

E X E M P L U M V L

Oenopola duplex habet vinum; Unius Cantharus constat 6 stuf. alterius vero 12 stuf. vult autem ex duobus istis vini generibus miscere 6 cantharos, ut mixti cantharus constet 10 stuferis.

Pret. majus	D	
A 12	4	Defectus pretii minoris a medio.
Pret. Med. 10 B		
C 6	E	2. Excessus pretii majoris supra medium.
Pretium minus		
<hr/>		
	F 6	Summa differentiarum.

Tum fiat.

Summa Differentiarum	Totum Mixtum	Singulae Differentiae	Singulae partes.
6	6	<u>4</u> /	4 A
		<u>2</u> /	2 C

Hu-

Hujus generis Exemplorum Resolutionem sequens dirigat.

Regula.

- I. Omnia fiant ut in Casu IIdi Regula præceptum fuit
- II. Tum differentiarum (D. E.) addantur in unam summam F.
- III. Quo facto, ponatur hæc proportionis Regula.

Differentiarum

Summa \hookrightarrow Totum mixtum. Ut singulæ differentiarum /

Ad singulas partes, singulis differentiis respondentes.

Scholium.

Ex præcedenti Exemplo patet, Si numerus datus mensurarum mixtarum sit æqualis summæ differentiarum, singulos numeros differentiarum etiam esse æquales partibus, seu numeris mensurarum simplicium.

E X E M P L U M . V I I .

Duo sunt diversa Genera Aromatum, unius uncia constat, stuf. 24. Alterius uncia 16 stuf. 16. Quæritur quantum de utroque sumendum, ut mixti uncia valeat 20 stuf. 20.

Fiat itaque.

A 24.	4	8 \hookrightarrow 1 = 4	$\frac{1}{2}$	Aromatis A
B 20	4	8 \hookrightarrow 1 = 4	/	$\frac{1}{2}$
C 16.	4	8 \hookrightarrow 1 = 4		Aromatis C
	8			

Exa-

Examen.

$$\begin{array}{l} \text{Aromatis A Uncia valet 24 ft. Ergo } \frac{1}{2} \text{ unc.} \dots 12 \text{ ft.} \\ \text{B} \dots \dots \dots 16 \text{ ft. Ergo } \frac{1}{2} \text{ Unciæ 8 ft.} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Aromatis A} \\ \text{B} \end{array}} \right\} \text{A}$$

Mixti Uncia 20 ft. ut req.

Scholium.

Si contingat ut Pretium Majus, Medium & Minus sint in Arithmetica Progressione, de utroque extremo sumenda est semiffis totius mixti.

E X E M P L U M VIII.

Sint tria genera mellis. Libra unius valeat stuf. 17. Alterius 14. Tertiū 7. Hæc ita misceri debent, ut una libra Mixti constet 11 stuferis. Quæritur quantum de singulis.

Fiat.

$$\begin{array}{l} 18 \quad 3 \quad 16 \sim 1 = 3 / \frac{3}{16} \text{ Libræ.} \\ 14 \quad 3 \quad 16 \sim 1 = 3 / \frac{3}{16} \text{ Libræ.} \\ 11 \quad 8 \quad 7 \quad 3 \quad 16 \sim 1 = 10 / \frac{10}{16} \text{ Libræ.} \end{array}$$

Sum-	16.
ma	
diffe-	
rentia-	
rum.	

$$\frac{16}{16} \propto 1 \text{ Libra.}$$

T

Hic

Hic tria occurrunt pretia, duo majora, & unum minus medio: quæ duo majora minori alligata, dabunt duas diversas differentias, pretio minori adscribendas; quæ in additione sibi invicem additæ, faciunt 10.

E X E M P L U M I X.

Sunt quatuor genera Aromatum miscenda, ad 500 uncias. Piper, Saccharum. Cinamomum & Zingiber. Uncia piperis valet 25. Sacchari 24. Cinnamomi 22. Zingiberis 18.

Uncia mixti constabit 23. quæritur quantum ex singulis sic sumendum.

Fiat.	Unciæ.
$23 \left[\begin{array}{l l} 25 & 5 \\ 24 & 1 \\ 22 & 1 \\ 18 & 2 \end{array} \right]$	$9 \sim 500 = 5 / \frac{2500}{9} \propto 277 \frac{7}{9} \text{ Piperis.}$
	$9 \sim 500 = 1 / \frac{500}{9} \propto 55 \frac{5}{9} \text{ Sacchari.}$
	$9 \sim 500 = 1 / \frac{500}{9} \propto 55 \frac{5}{9} \text{ Cinna.}$
	$9 \sim 500 = 2 / \frac{1000}{9} \propto 111 \frac{1}{9} \text{ Zingiber.}$
	<hr/> Summa 500 ut requir.

Examen & Proba.

Multiplia. uncias
mixtas 500 per pre-
tium medium & ha-
bebis illa-
rum pre-
tium 11500.
quod debet
esse \propto sum-
ma pretiorum, qui-
bus constant singulae
partes miscendae.

		Mult.		
277 $\frac{7}{9}$	per 25	\propto	6944 $\frac{4}{9}$	} A
55 $\frac{5}{9}$	per 24	\propto	1333 $\frac{3}{9}$	
55 $\frac{5}{9}$	per 22	\propto	1222 $\frac{2}{9}$	
111 $\frac{1}{9}$	per 18	\propto	2000	
			11500	ut requir.

Alligatio I I.

Poterunt eadem extrema pretia alligari pretio medio
hunc in modum.

Quare jam iterum fiat.

25 24 23 22 18	1 5 3 1	$9 \sim 500 = 1 / \frac{500}{9} \propto 55 \frac{5}{9}$ Piperis. $9 \sim 500 = 5 / \frac{2500}{9} \propto 277 \frac{7}{9}$ Sacchari. $9 \sim 500 = 5 / \frac{1000}{9} \propto 111 \frac{1}{9}$ Cinnam. $9 \sim 500 = 1 / \frac{500}{9} \propto 55 \frac{5}{9}$ Zingiberis.
----------------------------	------------------	---

Summa 9
differen-
tiarum.

Examen instituitur ut in Alligatione I.

$$\begin{array}{r}
 23 \\
 500 \\
 \hline
 11500
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 55 \frac{5}{9} \text{ Mult. per. } 25 \propto 1388 \frac{8}{9} \\
 277 \frac{7}{9} \dots\dots\dots 24 \propto 6666 \frac{6}{9} \\
 111 \frac{1}{9} \dots\dots\dots 22 \propto 2444 \frac{4}{9} \\
 55 \frac{5}{9} \dots\dots\dots 17 \propto 1000
 \end{array}$$

11500 ut requir.

E X E M P L U M X.

Oenopola quadruplex habet vinum. I^{mi} pinta constat 6. stuf. II^{di} pinta 4. III^{di} pinta 2. IV^{di} pinta 1. Aliquis vult miscere quatuor ista vina ad 150 pintas: ut istius mixti vini pinta constet 3. stuf. Quæritur quantum ex unoquoque debeat sumi.

	Fiat.	Pintæ	
3	$ \begin{array}{r l} 6 & 2 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ \hline 7 \end{array} $	$7 \sim 150 = 2 / \frac{300}{7} \propto 42 \frac{6}{7}$	I
		$7 \sim 150 = 1 / \frac{150}{7} \propto 21 \frac{3}{7}$	II
		$7 \sim 150 = 1 / \frac{150}{7} \propto 21 \frac{3}{7}$	III
		$7 \sim 150 = 3 / \frac{450}{7} \propto 64 \frac{2}{7}$	IV
		<hr/> 150 ut req.	
		Exa-	

E x E M P L V M XI.

Quidam templo dono volens dare campanam, confi-
ciendam locat ex quadruplici metallo. I. centenarius 22
constat 12 flor. II. 15. III. 17. IV. 20. Vult autem
ut habet pondus 3500 lb. & pro ea solvit 500 florenos.

Quæritur ex singulis metallis quantum sumere oporteat.

NB.

In hac quaestione darum non est pretium medium, seu pretium quo constat centenarius Metalli mixti. Illud autem hoc modo inveniatur.

Totum mixtum. constat flor. Unus cent. mixti

$$\frac{300}{7} \sim \frac{300}{100} = 10 \frac{2}{7}$$

Tum fiat.

$$16 \sim 3500 \implies 2\frac{2}{7} / \text{ Venit } 500. \text{ Metal. I.}$$

$$16 \sim 3500 \implies 2\frac{3}{7} / \quad 500 \quad \text{II}$$

$$16 \sim 3500 \implies 2\frac{2}{7} / \quad 500 \quad \text{III}$$

$$16 \sim 3500 \implies 9\frac{1}{7} / \quad 2000 \quad \text{IV}$$

 35000 ℔ ut req.

E X E M P L U M XII.

Mercator quadruplex habet Gossypium. Libra I^{ma} valet 20, st. | II. 16. | III. 14. | IV. 12. | De Secundo autem cujus libra valet 16 st. sumsit libras 33.

Jam quæritur, quot libras e cæteris generibus addere debeat, ut mixti libra valeat 15 stuf.

	20	3
	16	1
	14	1.
15	12	5

Quæ differentia indicant si ex Primo Gossypio sumantur libæ 3, debere sumi ex II. 1 ℔. & ex III. 1 ℔, & ex IV 5 ℔.

Jam ex quæstione patet ex Gossypio II sumtas esse 33 ℔. unde reliqua hoc modo inveniuntur.

T 4

℔ II.

II I I II. Quare sumuntur ex singulis

$$\begin{array}{rcl}
 I & \text{---} & 33 / 99. \\
 II & \text{---} & 33 / 33 \\
 III & \text{---} & 33 / 33 \\
 IV & \text{---} & 33 / 165 \\
 \hline
 & & 339
 \end{array}$$

Examen sic habetur.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Totum mixtum} & II & 330 \\
 \text{Pretium medium} & & 15 \\
 \hline
 & & 1650 \\
 & & 330 \\
 \hline
 \text{Ituf.} & & 4950
 \end{array}$$

Deinde

$$\begin{array}{rcl}
 99 & M. p. & 20 \infty 1980 \\
 33 & \text{---} & 16 \infty 528 \\
 33 & \text{---} & 14 \infty 462 \\
 165 & \text{---} & 12 \infty 1980 \\
 \hline
 & & 4950
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} 99 \\ 33 \\ 33 \\ 165 \end{array}} \right\} A$$

4950 ut requir.

Notandum autem eosdem Librarum numeros etiam posse inveniri si singulae differentiae multiplicentur per 33.

$$\begin{array}{rcl}
 3 & 1 & 1 & 5 \\
 33 & 33 & 33 & 33 \\
 \hline
 99 & 33 & 33 & 165
 \end{array}$$

Quia sc. istae differentiae expriment proportionem Librarum sumendarum: ista autem non mutatur, si termini per eundem Numerum multiplicentur.

Alli-

Alligatio I I.

		Fiat jam rursus	Adeoque!
15	20	1 00 II 00 I 00 II 00 I	ex singulis
	16	3 1 = 33 / 11	sumendæ
	14	3 00 II 00 III 00 II 00 III Ex I 11	
	12	3 55 = 33 / 55	II 33
		5 00 II 00 IV 00 II 00 IV	III 55
		1 3 1 = 33 / 11	IV 11

Examen.

Gossypii mixti Libræ	110	} M
Pretium medium	15	
	550	
	110	
	1650	

Deinde.

00				
11	M. per	20 ∞	220	I
33	_____	16 ∞	528	II
55	_____	14 ∞	770	III
11	_____	12 ∞	132	IV
			1650	
			ut ante.	

EXEMPLUM XIII.

Libra 1 Garyophilli constat Julii 3. Piperis 4. Cinnamomi 6. Zingiberis 8. Croci 10. Quæritur quantum ex singulis debeat sumi, ut mixti libra 1 constet Julii 7.

Tum fiat.

$\begin{array}{r} 10 \\ 8 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 4. 1. \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ \hline 15 \end{array}$	$15 \sim 1 = 5 / \frac{5}{15}$ Croci
		$15 \sim 1 = 3 / \frac{3}{15}$ Zingiberis.
		$15 \sim 1 = 3 / \frac{3}{15}$ Cinnamomi.
		$15 \sim 1 = 1 / \frac{1}{15}$ Piperis,
		$15 \sim 1 = 3 / \frac{3}{15}$ Garyophilli.

$$\frac{15}{15} \infty 1.$$

Examen.

Libra mixta 1 Julii $\frac{7}{7}$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} M$	Croci $\frac{5}{15}$	Mult. p 10 $\infty 5$	$\frac{5}{15}$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} A$
		Zing. $\frac{3}{15}$		$8 \infty 1 \frac{9}{15}$	
		Cinam. $\frac{3}{15}$		$6 \infty 1 \frac{3}{15}$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} A$
		Piper $\frac{1}{15}$		$4 \infty \frac{4}{15}$	
		Garyoph. $\frac{3}{15}$		$3 \infty \frac{9}{15}$	
$\frac{7}{7}$ ut req.					
<i>Alli.</i>					

Alligatio 1^a.

Fiat.

7	$\begin{array}{r} 10 \\ 8 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \\ 4 \cdot 1. \\ 1. \\ 3 \\ 1 \end{array}$	$13 \sim 1 = 3 / \frac{3}{13}$ Croci
			$13 \sim 1 = 5 / \frac{5}{13}$ Zingiberis
			$13 \sim 1 = 1 / \frac{1}{13}$ Cinnam.
			$13 \sim 1 = 3 / \frac{3}{13}$ Piperis
			$13 \sim 1 = 1 / \frac{1}{13}$ Garyoph.
			$\frac{13}{13} \infty 1$ Libra.

Examen.

Pretium Med. 7 Libra mixta 1	$\left. \begin{array}{l} 7 \\ 1 \end{array} \right\} M$	Croci $\frac{3}{13}$ M. p 10 ∞ 2 $\frac{4}{13}$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} A$
		Zingb. $\frac{5}{13}$ — 8 ∞ 3 $\frac{1}{13}$	
		Cinnam. $\frac{1}{13}$ — 6 ∞ $\frac{6}{13}$	
		Piper $\frac{3}{13}$ — 4 ∞ $\frac{12}{13}$	
		Garyoph. $\frac{1}{13}$ — 3 ∞ $\frac{3}{13}$	
		7 ut req.	

Scho

Scholium ex Tacqueto.

Ex hoc & variis præcedentibus Exemplis patet nos non uni semper alligatos esse Alligationi, sed eam variis modis posse fieri.

Imo vero, quod notandum est, omnes quæstiones huic Regulæ Alligationis subjacentes, in quibus plura duobus pretia dantur, infinitis modis solvi poterunt.

Ut autem hoc manifestum fiat, ponamus iterum præcedens Exemplum.

præf. medium	a	3	f. 9	Seligatur ex pretiis datis unum quod sit minus pretio medio. sc. a ∞ 3. Cum hoc pretio a, reliqua quatuor, b. c. d. e. alligentur tanquam unum aliquod pretium:
Mixti	b	4		
7	c	6		
	d	8		
	e	10		

Hoc modo.

Accipiatur quivis numerus f ∞ 9, major minimo illorum ut & medio, sc. major numero b ∞ 4 & major numero 7; minor vero maximo illorum e.

Jam secundum Regulam alligationis traditam, patet res pretiorum b. c. d. e. ita misceri posse, ut una libra mixti ex illis possit vendi pretio 9 Juliorum ∞ f.

Quare si pro speciebus b. c. d. e. sumatur ex iis mixtum cujus una libra valeat pretium f, quæstio sic stabit.

Quando

Quando fiat.

$$7 \begin{array}{c} a \\ \swarrow \\ f \end{array} \begin{array}{c} 3. \\ 9 \end{array} \left| \begin{array}{c} 2. \\ \frac{4.}{6.} \end{array} \right. \quad 6 \sim 1 = \begin{array}{c} 2 / \frac{2}{6} X \\ \swarrow \\ 4 / \frac{4}{6} Z \end{array}$$

Patet igitur X & Z , facere unam libram mixti ex omnibus a. b. c. d. e. Cum X. Z. sit mixtum ex a. & f. At vero f. mixtum ex b. c. d. e

Et sic assumendo numerum f majorem tum minimo ipsorum b. c. d. e. tum dato medio; minorem vero e maximo; invenimus unam quæstionis propositæ solutionem.

Illa autem solutio semper variabitur, quoties pro f alius diversus assumatur medius.

Jam vero tales medii, adhibitis fractionibus, infiniti possunt assumi. Unde jam sequitur, quæstionis propositæ infinitas dari solutiones.

EXEMPLUM XIV.

De Corona Hieronis Regis.

Hiero Syracusarum Rex, Diis suis donum aliquod offerre volens Aurifabrum conficere jubet Coronam Auream pendentem Ex: gr: 100 ℥. Quam cum propius perlostrasset Rex, non ex auro puro sed adulterato & argento mixto conflatum esse Coronam suspicari cepit. Ex qua dubitatione ut se expidiret Hiero Archimedem vocavit

cavit in Auxilium, qui subtilissimo Experimento latentem aurifabri detexit dolum.

Sumfit Massam auream puram ejusdem cum Corona ponderis : ut & argenteam ; sc utramque pendentem 100 ℥.

Deinde utramque seorsum ut & Coronam immergit aquæ : & ejectam a singulis aquam mensuravit , & tum ex mensuris istis , habita sc. earum proportionem scrutatus est quantum Argenti coronæ immiscuisset Aurifaber.

Jam quæritur , si ponamus ejecisse.

Massam Auream 20 Pintas Aquæ.

Coronam 24 Pintas.

Massam Argentem 36 Pintas.

Quantum Argenti fuit Auro mixtum.

Quæ quæstio ut ope hujus Regulæ solvatur . sic procedendum est ; Pintæ 20 Aquæ a Massa Aurea ejectæ : ut & 36 Pintæ ab argentea expulsæ , sunt duo termini Extremi.

Iam quæritur quantum debeat sumi de auro & de argento, ut 100 ℥ ejiciant pintas aquæ 24. qui est medius datus.

Ponatur itaque.

$$\begin{array}{r|l}
 20 & 12 \\
 24 & \\
 36 & 4 \\
 \hline
 16 &
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 18 \\
 4 \\
 18 \\
 4 \\
 1
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{---} \\
 \text{---} \\
 \text{---} \\
 \text{---} \\
 \text{---}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 180 \\
 25 \\
 180 \\
 25 \\
 1
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{---} \\
 \text{---} \\
 \text{---} \\
 \text{---} \\
 \text{---}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{Venit } 75 \text{ ℥ Auri.} \\
 3 \\
 \text{Venit } 25 \text{ ℥ Arg.} \\
 1
 \end{array}$$

Unde jam patet Aurifabum auro affudisse 25 ℥ Argenti. cum tamen Corona deberet esse ex puro auro confecta.

De-

Demonstratio hujus Regula Alligationis.

$\begin{array}{c c} \text{A} & \\ \hline \text{X} & \text{Y} \\ \hline \text{B} & \end{array}$	Sumantur tres Quantitates A. XY. B. inter se æquales, Ex quibus sit A quantitas miscenda majoris pretii B quantitas miscenda minoris pretii XY quantitas ex utraque A & B mixta. sc. vilior quam A, & præ- stantior quàm B. Illius autem pars X sit ejusdem pretii cum A. Et pars Y sit ejusdem pretii cum B.
--	--

Hinc jam manifesto sequitur quod

Pretium majus A excedat pretium medium $X + Y$ eo
 magis, quo Y fuerit major; & contra eo minus, quo
 Y fuerit minor.

Ut &

Pretium minus B minus deficiat a Medio $X + Y$ quo Y
 fuerit major: & contra eo magis, quo Y fuerit minor.

Hisce positis, Erit O.

Excessus A supra medium $X + Y$ \sim Defectus B
 a medio $X + Y = X/Y$

Et Componendo

Excessus A supra medium
 cum

Defectus B a medio.
 hoc est

Summa differentiarum \sim Defectus B a medio
 $=$ Totum mixtum $X + Y / Y$.

Si

Si jam invertatur Proportio O. erit

Defectus B a medio $X+Y$ \sim Excessus A supra medium $X+Y = Y/X$.

Iterum componendo,

Defectus B a medio

cum

Excessu A supra medium

hoc est

Summa differentiarum \sim Excessus A supra medium $=$ Totum mixtum $X + Y/X$

Atque hoc est omne quod in Regula continetur Q. D E.

C A P U T IX.

De Regula Positionis Simplicis.

Sic dicitur hæc Regula, non quod falsa sit, aut falsum doceat, sed quod mediante proportionis Regula, ex posito Numero falso verum eruere doceat.

Absolvitur tota hæc Regula tribus præceptis.

- I. Ponatur Numerus aliquis pro quæsito, qui postulatis propositæ quæstionis aptior videbitur.
- II. Imitando cum illo omnes datas in quæstione conditiones inquiretur utrum positus iste numerus quæsito satisfaciatur.

Quod si fiat, numerus positus erit ille qui quærebatur.

- III. Si non sit quæsitus; adhibita Proportionis Regula ex facta positione Numeri falsi reperitur Verus.

E X E M-

EXEMPLUM I.

Sit Numerus 100 dividendus in tres partes, quarum prima sit tripla secundæ. Secunda dupla tertiæ.

Ponatur pars III $\propto 2$.
Eritque II $\propto 4$. } A.
Adeoque I $\propto 12$. }

Summa omnium $\propto 18$. Deberet autem esse 180.

Quare fiat per Regulam Proportionis.

Numerus imitando conditio- nes quæ- stionis acquisitus	Numerus pro vero positus: sed tamen falsus	Numerus datus in se continens quæstio- nis con- ditiones.	Numerus verus quæsitus.
---	--	--	----------------------------

$$\frac{100}{9} = \frac{180}{9} \quad / \quad \frac{100}{9} \propto 11 \frac{1}{9} \text{ Pars III}$$

Hinc jam facile reperiuntur Pars II. & I.

Pars III.	$11 \frac{1}{9}$	} M	Examen	Pars I	$\propto 66 \frac{6}{9}$	}
	$\frac{2}{9}$			II	$\propto 22 \frac{2}{9}$	
Pars II.	$22 \frac{2}{9}$			III	$\propto 11 \frac{1}{9}$	
	$\frac{3}{9}$	} M				
	$\frac{6}{9}$					
Pars I.	$66 \frac{6}{9}$					
	$\frac{9}{9}$					100 ut req.

Demonstratio.

Numeri 2. 4. 12. habent conditionem in quaestione requisitas, & simul faciunt. 18. Quemadmodum partes, quaesita, simul faciunt 100.

Quare erit

$$18 \sim 2 = 100 / 11 \frac{1}{9}$$

$$18 \sim 4 = 100 / 22 \frac{2}{9}$$

$$18 \sim 12 = 100 / 66 \frac{6}{9}$$

————— Additis term. 2dis & 4tis

$$18 \sim 2 + 4 + 12 = 100 / 11 \frac{1}{9} + 22 \frac{2}{9} + 66 \frac{6}{9}$$

Atqui $18 \propto 2 + 4 + 12.$

$$\text{Ergo } 100 \propto 11 \frac{1}{9} + 22 \frac{2}{9} + 66 \frac{6}{9}$$

E X E M P L U M II.

Est Leo Lapideus, qui si ex Oculis aquam profundat horis 10 subjectum receptaculum implet. Si ex auribus horis 5. Si ex ore horis 20. Quaeritur intra quot horas implebit, si aquam simul fundat Oculis, Auribus & Ore.

De Regula Partionis Simplicis. 307

Ponatur ad hoc requiri horam 1.

Hora 1 Oculi implebunt $\frac{1}{10}$ Receptaculi.

Aures

$$\frac{1}{5}$$

Os

$$\frac{1}{20}$$

} A

$$\frac{7}{20}$$

Receptaculi; sed debent replere totum Receptaculum hoc est

$\frac{20}{20}$ Quare fiat per Regulam proportionis.

$$\frac{7}{20} \text{ Hora} \quad \frac{20}{20} / 2 \frac{6}{7} \text{ Hora. id est } 2 \frac{3}{7} \text{ Minuta.}$$

E X E M P L U M III.

Invenire Numerum cujus $\frac{1}{4}$ multiplicata per 8, productum per 4 divisum, faciat quotientem 36.

Posito I.

Ponatur Numerus quæsitus esse 12.

$$\begin{array}{r} \frac{1}{4} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{24}{4} \\ \hline \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} M \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} D$$

6. qui debet esse 36.

V 2

Quare

Quare fiat

$$6 \text{ ————— } 12 \text{ ———— } 36 / 72. \text{ Numerus quæsitus.}$$

Ut facile probari potest.

Positio II.

Ponatur Numerus

$$\frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ \hline 5 \\ 8 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 20 \\ \hline 5 \\ 8 \end{array}} \right\} M.$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ 4 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 40 \\ 4 \end{array}} \right\} D.$$

10. qui debet esse 36.

Quare per Regulam Auream erit

$$10 \text{ ————— } 20 \text{ ———— } 36 / 72.$$

Positio III. Cum fractionibus.

Ponatur Numerus

$$\frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 3 \\ 4 \\ 8 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 3 \\ \hline 3 \\ 4 \\ 8 \end{array}} \right\} M.$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 4 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 6 \\ 4 \end{array}} \right\} D.$$

$$\frac{6}{4} \text{ debet esse } 36.$$

Instituatur itaque Proportio.

$$\frac{6}{4} \text{ ————— } 12 \text{ ———— } 36 / 72$$

EXEM-

De Regula Positionis Simplicis. 309

EXEMPLVM IV.

Invenire Numerum, cujus semissis, tertia pars & quarta pars simul additæ faciant 65.

Ponatur Numerus quæsitus esse 24.

$$\begin{array}{r}
 24 \quad \frac{1}{2} \text{ --- } 12 \\
 \frac{1}{3} \text{ --- } 8 \\
 \frac{1}{4} \text{ --- } 6 \\
 \hline
 26
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{A.}$$

Quare fiat.

$$\begin{array}{r}
 38 \sim 24 = 65 / \text{venit } 60 \\
 13 \quad 12
 \end{array}$$

Examen.

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{2} \text{ --- } 30 \\
 \frac{1}{3} \text{ --- } 20 \\
 \frac{1}{4} \text{ --- } 15 \\
 \hline
 65 \text{ ut req.}
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\}$$

Alia positio

Ponatur Numerus quæsitus esse 36.

$$\begin{array}{r}
 36 \quad \frac{1}{2} \text{ --- } 18 \\
 \frac{1}{3} \text{ --- } 12 \\
 \frac{1}{4} \text{ --- } 9 \\
 \hline
 39
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\}$$

Tum fia.

$$\begin{array}{r}
 38 \sim 36 = 65 / 60 \\
 13 \quad 12 \quad \text{ut ante.}
 \end{array}$$

Et sic pluribus, imo infinitis positionibus quæstio solvi poterit, præsertim quando partes numerorum positorum fractiones continent: quo casu quilibet numerus potest assumi pro Vero: uti probat sequens

Posito III. ubi occurrunt fractiones.
Ponatur numerus quæsitus esse 8.

$$8. \quad \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \text{ --- } 4 \propto \frac{12}{3} \\ \frac{1}{3} \text{ --- } \frac{8}{3} \propto \frac{8}{3} \\ \frac{1}{4} \text{ --- } 2 \propto \frac{6}{3} \end{array} \right\} A$$

$$\frac{26}{3} \text{ --- } 8 \text{ --- } 65/$$

$$26 \text{ --- } \text{seu } 24 \text{ --- } 65/60 \text{ ut supra.}$$

Positio. IV cum fractionibus.

Ponatur Numerus quæsitus esse 15

$$15 \quad \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \text{ --- } \frac{15}{2} \propto \frac{30}{4} \\ \frac{1}{3} \text{ --- } 5 \propto \frac{20}{4} \\ \frac{1}{4} \text{ --- } \frac{15}{4} \propto \frac{15}{4} \end{array} \right\}$$

$$\frac{63}{4} \text{ --- } 15 \text{ --- } 65/$$

$$62 \text{ --- } \text{seu } 60 \text{ --- } 65/60$$

EXEM-

EXEMPLUM V.

Filio ex Patre quærenti quot habeat annos (sc. filius) respondet Pater. Si ad annos tuos adhuc totidem addas, & venientis Summæ adhuc $\frac{1}{2}$. Hujusque Summæ adhuc $\frac{1}{3}$, & hujus tertiæ summæ adhuc $\frac{1}{4}$. natus eris annos 100.

Ponatur Numerus annorum quæsitus esse 10.

$$\begin{array}{r}
 10. \quad 10 \\
 \hline
 10 \\
 \hline
 20 \\
 \\
 1000. \frac{1}{2} \\
 \hline
 30 \\
 \\
 1000 \frac{1}{3} \\
 \hline
 40 \\
 \\
 1000 \frac{1}{4} \\
 \hline
 50
 \end{array}$$

At debebat esse 100.

Fiat

50 ~ 10 = 100 / 20.
Adeoque ætas Filii est
annorum 20.

Alia Positio.

$$\begin{array}{r}
 36. \quad 36 \\
 \hline
 36 \\
 \hline
 72 \\
 \\
 3600 \frac{1}{2} \\
 \hline
 108 \\
 \\
 3600 \frac{1}{3} \\
 \hline
 244 \\
 \\
 3600 \frac{1}{4} \\
 \hline
 180 / \text{qui debet esse } 100 \\
 \text{Fiat} \\
 180 \sim 36 = 100 / 20 \text{ ut supr.} \\
 \quad \quad \quad 1 \quad \quad \quad 2
 \end{array}$$

E X E M P L U M V I.

Quadam debitorum suorum solvit $\frac{2}{2} / \frac{1}{3} /$
 $\frac{1}{8}$ & comperit se adhuic debere 72 florenos : Quaeri-
 tur quantum fuerit totum debitum 72 flor.

Positio I.

Ponatur fuisse debitum 72 flor.

S	72	$\frac{1}{2}$	—	36.	}	A
	69	$\frac{1}{3}$	—	24		
	<u>3</u>	$\frac{1}{8}$	—	9		
			—	<u>69</u>		

Debebat esse 72.

Quare fiat.

$\frac{72}{1} \div \frac{1}{8} = 72 / 1728$ Debitum quæsitum.
 24

Positio

Positio I I.

Ponatur fuisse debitum 48 flor.

S	48 46		24	}
	2		16	
			6	
			46	

Tum fiat.

$$\frac{48}{24} \sim \frac{48}{24} = 72 / 1728 \text{ ut ante.}$$

Positio III cum fractionibus

Ponatur debitum fuisse 10.

20 30	480		10		240	}
	24 S		20		160	
	460		3		60	
	24		20			
	20		8		460	
	24				24	

debebat esse 72.

Quare fiat.

$$\frac{24}{24} \sim \frac{480}{24} = 72 / \text{venit } 1728 \text{ ut supra.}$$

E X E M P L U M V I I.

Hostilis Exercitus tertia pars caesa est, pars quarta capta : Et 100 fugerunt. Quot ergo fuere universi ? quot caesi ? quot capti ?

Positio I.

Ponamus fuisse exercitum 12000.

$$\begin{array}{r}
 \left. \begin{array}{l} 12000 \\ 7000 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{array} \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \left. \begin{array}{l} 4000 \\ 3000 \end{array} \right\} \\
 \hline
 5000. \qquad \qquad \qquad 2000.
 \end{array}$$

debent autem esse
1000 qui fugerunt.

Quare fiat

$$5000 \text{ --- } 12000 = 10000 / 2400.$$

Adeoque Exercitus fuit 2400. militum quorum.

$$\begin{array}{r}
 \text{Caesi sunt} \text{ --- } \text{---} \text{---} 800 \\
 \text{Capti} \text{ --- } \text{---} \text{---} 600 \\
 \text{Fugitivi} \text{ --- } \text{---} \text{---} 1000 \\
 \hline
 2400.
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} A$$

Positio I L

Fuerit Exercitus 72000.

$$\begin{array}{rcl}
 S \left\{ \begin{array}{l} 72000 \\ 42000 \end{array} \right. & \begin{array}{l} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{array} & \begin{array}{l} \text{---} 24000 \\ \text{---} 18000 \end{array} \\
 \hline & & 42000
 \end{array}$$

Debebant esse 1000 fugitivi.

Fiat itaque

$$\begin{array}{rcl}
 72000 & \sim & 72000 = 1000 / 2400 \\
 1 & & 24
 \end{array}$$

Quibergo Exercitus 2400 ut supra.

Positio III, cum fractionibus.

Quam licet impropiam, cum non nisi integri homines in militia esse censeantur, tamen exercitii gratia adhibere liceat,

Ponamus Exercitum fuisse 17000.

$$\begin{array}{rcl}
 S \left\{ \begin{array}{l} 204000 \\ 119000 \end{array} \right. & \begin{array}{l} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{array} & \begin{array}{l} \text{---} 17000 \\ \text{---} 17000 \end{array} \\
 \hline & & 119000
 \end{array}$$

Debebant esse 1000.

In.

Instituatur itaque proportio.

$$\frac{28000}{12} \sim \frac{20000}{12} = \frac{1000}{200} / \frac{2400}{\text{ut ante.}}$$

11

12

I

EXEMPLUM VIII.

Socrates interrogatus quot haberet discipulos. Respondit Dimidia pars Physicæ dat operam. $\frac{1}{4}$ pars Mathematicæ. & Octava pars Mathematicis. Jam Quæritur Numerus discipulorum? si præter superiores adhuc habeat 8.

Positio I.

Ponatur discipulorum num.

$$\begin{array}{r} 16 \} S \\ 14 \} \\ \hline 2 \text{ debe-} \\ \text{bat ef-} \\ \text{fe 8.} \end{array} \quad \begin{array}{r} \frac{1}{2} \text{ --- } 8 \\ \frac{1}{4} \text{ --- } 4 \\ \frac{1}{8} \text{ --- } 2 \\ \hline 14 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} 16 \\ 14 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ 8 \end{array}} \right\} A$$

Fiat.

$$16 = 8 / 64 \text{ Numerus} \\ 4 \text{ Quæsitus.}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 1 \\ \hline 4 \\ 1 \\ \hline 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 32 \\ 16 \\ 8 \\ \hline 8 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} 32 \\ 16 \\ 8 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} A. venit 64. \\ \text{ut requir.} \end{array}$$

Positio II.

Ponatur discipul. numerus.

$$\begin{array}{r} 24 \} S \\ 21 \} \\ \hline 3, \text{ qui} \\ \text{debebat} \\ \text{esse 8.} \end{array} \quad \begin{array}{r} \frac{1}{2} \text{ --- } 12 \\ \frac{1}{4} \text{ --- } 6 \\ \frac{1}{8} \text{ --- } 3 \\ \hline 21 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} 24 \\ 21 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ 8 \end{array}} \right\}$$

Quare fiat.

$$8 = 8 / 64 \text{ ut ante}$$

Po-

De Regula Positionis Simplicis. 317

Positio III. Cum fractionibus.

Ponatur discipulorum Numerus esse 25.

$$\begin{array}{r|l}
 \frac{1}{2} \text{ --- } \frac{25}{2} & \left. \begin{array}{r} 8 \\ 100 \end{array} \right\} A \\
 \frac{1}{4} \text{ --- } \frac{25}{4} & 50 \\
 \frac{1}{8} \text{ --- } \frac{25}{8} & 25 \\
 \hline
 & 175 \\
 & 8
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 25 \text{ f. } \frac{200}{8} \\
 \frac{175}{8} \\
 \hline
 \frac{25}{8} \text{ qui debet esse 8.}
 \end{array}
 \quad
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} S$$

$$\frac{25}{8} \sim \frac{200}{8} = 8/64 \text{ ut req.}$$

EXEMPLUM IX.

Quidam Senex interrogatus de sua aetate respondit; si numero suorum Annorum adjungatur eorum semissis, & ex summa iterum auferatur ejusdem pars quarta, tunc remanebunt 90 anni. Queritur quot annos senex habuerit.

Positio I.

Ponatur Numerus annorum 16.

$$\frac{1}{2} \quad \begin{array}{l} 16 \\ 8 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 16 \\ 8 \end{array}} \right\} A$$

$$\frac{1}{4} \quad \begin{array}{l} 24 \\ 6 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 24 \\ 6 \end{array}} \right\} S$$

18 debet esse 90.

Quare fiat

16 = 80 / 80 Numerus
5 / quæsitus.

Positio II.

Ponatur Numerus Annorum 64.

$$\frac{1}{2} \quad \begin{array}{l} 64 \\ 32 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 64 \\ 32 \end{array}} \right\} A$$

$$\frac{1}{4} \quad \begin{array}{l} 96 \\ 24 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 96 \\ 24 \end{array}} \right\} S$$

72 debebat esse 90.

Fiat itaque

64 = 80 / 80 ut
8 10 / ante.
I

Positio III cum fractionibus.

Ponatur quilibet numerus pro numero Annorum Senis.
Ex Gr. 15. seu $\frac{30}{2}$

$$\frac{1}{2} \quad \begin{array}{l} 30 \\ 15 \\ 2 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 30 \\ 15 \\ 2 \end{array}} \right\} A$$

$$\frac{45}{2} \quad \text{seu } \frac{180}{8}$$

$$\frac{1}{4} \quad \begin{array}{l} 45 \\ 8 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 45 \\ 8 \end{array}} \right\} S$$

$\frac{135}{8}$ qui debebat esse 90

Quare

De Regula Positionis Simplicis. 297

Quare fiat.

$$\frac{135}{8} \sim 15. \frac{120}{8} = 90 / \text{venit. } 80 \text{ ut supra.}$$

$$\frac{28}{8} \sim \frac{120}{40} \frac{10}{2}$$

$$1$$

E X E M P L U M X.

Invenire Numerum. cujus $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6}$
una cum 3 faciunt 300.

Positio I.

Sit Numerus quæsitus 60.

$$\frac{1}{2} \longrightarrow 30$$

$$\frac{1}{3} \longrightarrow 20$$

$$\frac{1}{4} \longrightarrow 15$$

$$\frac{2}{5} \longrightarrow 24$$

$$\frac{1}{6} \longrightarrow 10$$

$$6$$

99 qui de-
bet esse
297.

Hæc quæstio per simpli-
cem positionem solvi non
poterit nisi prius nume-
rus datus 3 dematur de
300, ut maneat, 297.
cui æquales jam debent
esse omnes istæ partes da-
tæ.

Quare

Quare fiat.

$$\begin{array}{r}
 3) \quad 55 \quad \text{---} \quad 55 = 111 / 180 \text{ Numerus} \\
 11) \quad 55 \quad \quad \quad 20 \quad \quad 11 / \quad \text{quæsitus.} \\
 3) \quad 5 \quad \quad \quad \quad \quad 9 \\
 \quad \quad 1
 \end{array}$$

Positio I I.

Ponatur Numerus quæsitus 120.

1		60	} A
2			
1		40	
3			
1		30	
4			
2		48	
5			
1		20	
6			

198. debet esse 297.

Quo facto fiat

$$\begin{array}{r}
 3) \quad 198 \quad \text{---} \quad 198 = 111 / 180 \text{ ut supra.} \\
 2) \quad 99 \quad \quad \quad 49 \quad \quad 11 / \\
 21) \quad 99 \quad \quad \quad 20 \quad \quad 9 \\
 \quad \quad 1
 \end{array}$$

Po-

De Regula Positionis Simplicis. 321

Positio III cum fractionibus.

Pro numero quaesito ponatur quilibetque Numerus.

Ex gr. 17. $\propto \frac{1020}{60}$

$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{2}$	510	} A
$\frac{1}{3}$	$\frac{17}{3}$	340	
$\frac{1}{4}$	$\frac{17}{4}$	255	
$\frac{2}{5}$	$\frac{34}{5}$	208	
$\frac{1}{6}$	$\frac{17}{6}$	170	
		1683	

sed debet esse 297.
60

Quare fiat.

99 $\frac{1888}{88}$ $\frac{1020}{88} = \frac{277}{3}$ / Venit 180 Numerus quaesitus ut ante.

$\frac{1020}{3} = 3060$
 $\frac{3060}{17} \propto 180$

X

Proba

Proba.

$\frac{1}{2}$	_____	90	} A
$\frac{1}{3}$	_____	60	
$\frac{1}{4}$	_____	45	
$\frac{2}{5}$	_____	72	
$\frac{1}{6}$	_____	30	
	_____	3	

300 ut requiritur.

Solutio.

Cum sæpius occurrant Exempla quæ simplici positioni subiecta non sunt, ut superfluum & inutilem evitemus laborem, notandum est hanc Regulam tantum solvere illas quæstiones, in quibus exprimuntur tales partes aut numeri, qui habeant eandem proportionem æque in minoribus numeris, ac in maioribus, quales sunt

$\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{3}{4}$ &c. ut & numeri dupli, tripli, quadrupli & sic porro.

Hinc jam patet in præcedenti Exemplo, quia numerus qui partibus $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{1}{6}$ debet addi, non potest habere eandem proportionem cum

De Regula Positionis Simplicis. 323

cum iisdem fractionibus minoris numeri, quam haberet cum iisdem partibus maioris Numeri; idcirco illud Exemplum simplici positione resolvi nequit, nisi ille numerus 3 prius auferatur a 300: ut tum istæ partes

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} \text{ numeri}$$

quæsi simul junctæ sint coles 297.

Ejusdem tenoris est indicium distinctionis harum Regularum quod ab aliis traditur. sc. Quæstionem aliquam propositam non solvi posse unica positione, quando assumi debet quidam numerus in quæstione datus, ut ipsius quæstionis conditiones adimpleantur.

CAPUT X.

De Regula Duplicis Positionis.

Hæc Regula præcedenti multo est generalior, cum sese extendat etiam ad tales quæstiones, quæ per præcedentem simplicis Positionis Regulam solvi nequeunt; illas autem omnes, quæ per simplicem expediiri queunt, etiam suo subijciat calculo.

Regula autem sic se habet.

- I. Pro numero quæsito pone quemvis numerum (quem vocabimus Hypothesin) & cum eo percurrere omnes quæstionis conditiones; quod si ille numerus non satisfaciât, erratum est, Ille autem error innotescit subtrahendo numerum per hypothesin inventum a numero in quæstione dato, vel contra.

X 2

Tum

Tum hic error suæ hypothesi subscribatur.

II. Adhuc semel alium assume Numerum & similiter procede cum eo juxta quæstionis tenorem; quod si & hic quæsito non satisfaciat, Hypothesi secundæ etiam suum subjunge errorem.

III. Multiplica primam Hypothesin per secundæ Hypothesis errorem; & vicissim secundam Hypothesin per errorem primæ.

Casus I.

Et si errores sint similes (sc. si utrimque erratum sit per excessum, aut utrimque per defectum) productorum Differentia dividatur per differentiam errorum; Quotiens dabit Numerum quæsitum.

Casus II.

At vero si errores sint dissimiles (hoc est si in una Hypothesi sit erratum per excessum, in altera per defectum) summa productorum dividatur per summam errorum. Et quotiens itidem dabit Numerum quæsitum.

E X E M P L V M I.

Tres Lucrati sunt florenos 400. Lucrum Secundi superat lucrum Primi flor. 12, Lucrum vero Tertii superat lucrum Secundi flor. 16. Quæritur cujusque lucrum.

Solu-

Solutio I.

Ubi uterque error est defectivus, adeoque pertinens ad Casum I.

Hypothesis I.

$$\begin{array}{r}
 \text{Lucrum I} \propto 8 \\
 \text{Adde 12} \\
 \hline
 \text{Lucrum II} \propto 20 \\
 \text{Adde 16} \\
 \hline
 \text{Lucrum III} \propto 36 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Lucrum I} \\ \text{Adde 12} \\ \text{Lucrum II} \\ \text{Adde 16} \end{array}} \right\} A \\
 \hline
 \text{Totum Lucrum} \propto 64 \text{ minus lucro dato } 400. \text{ Subtrahantur igitur} \\
 \begin{array}{r}
 400 \\
 64 \\
 \hline
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 400 \\ 64 \end{array}} \right\} S \\
 \hline
 336 \\
 \text{Error Hypothesis I Defectivus.}
 \end{array}$$

Hypothesis II.

$$\begin{array}{r}
 \text{Lucrum I} \propto 12 \\
 \text{Adde 12} \\
 \hline
 \text{Lucrum II} \propto 24 \\
 \text{Adde 16} \\
 \hline
 \text{Lucrum III} \propto 40 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Lucrum I} \\ \text{Adde 12} \\ \text{Lucrum II} \\ \text{Adde 16} \end{array}} \right\} A \\
 \hline
 \text{Omnium Lucrum} \propto 76. \text{ iterum minus lucro dato } 400. \\
 \begin{array}{r}
 400 \\
 76 \\
 \hline
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 400 \\ 76 \end{array}} \right\} S \\
 \hline
 324 \\
 \text{Error Hypoth. II iterum defectivus.}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{Hypoth. I} \propto 8. \\
 \text{Error Hyp. II} \propto 324. \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Hypoth. I} \\ \text{Error Hyp. II} \end{array}} \right\} M \\
 \hline
 \text{Prod.} \quad 2592
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{Hypoth. II} \propto 12 \\
 \text{Error Hyp. I} \propto 336. \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Hypoth. II} \\ \text{Error Hyp. I} \end{array}} \right\} M \\
 \hline
 \text{Prod.} \quad \propto 4032
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{Error I} \quad 336 \\
 \text{Error II} \quad 324 \\
 \hline
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 336 \\ 324 \end{array}} \right\} S$$

$$\text{Diff. Error} \propto 12$$

$$\begin{array}{r} \text{Productum } 4032 \\ \text{Productum } 2592 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 4032 \\ 2592 \end{array}} \right\} S$$

$$\begin{array}{r} \text{Diff. Product. } 1440 \\ \text{Diff. Errorum } 12 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 1440 \\ 12 \end{array}} \right\} D. \& \text{ venit } 120. \text{ pro lucro I:}$$

Hinc jam deducuntur Lucra reliquorum.

$$\begin{array}{r} \text{Lucrum I } \infty 120 \\ \text{Adde } 12 \\ \text{Lucrum II } \infty 132 \\ \text{Adde } 16 \\ \text{Lucrum III } \infty 148 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 120 \\ 132 \\ 148 \end{array}} \right\} A$$

400 ut requir.

Solutio II.

Ubi uterque error est excessivus, adeoque iterum spectans ad Casum I.

Hypothesis I.

$$\begin{array}{r} \text{Lucrum I } \infty 140. \\ \text{Adde } 12 \\ \text{Lucrum II } \infty 152 \\ \text{Adde } 16 \\ \text{Lucrum III } \infty 168 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 140 \\ 152 \\ 168 \end{array}} \right\} A$$

$$\begin{array}{r} 460 \\ 400 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 460 \\ 400 \end{array}} \right\} S$$

60

Error I Excessivus.

Hypothesis II

$$\begin{array}{r} \text{Lucrum I } \infty 130 \\ \text{Adde } 12 \\ \text{Lucrum II } \infty 142 \\ \text{Adde } 16 \\ \text{Lucrum III } \infty 158 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 130 \\ 142 \\ 158 \end{array}} \right\} A$$

$$\begin{array}{r} 430 \\ 400 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 430 \\ 400 \end{array}} \right\} S.$$

30

Error II Excessivus

Hypoth.

$\begin{array}{rcl} \text{Hypoth. I} & \propto & 140 \\ \text{Error II} & \propto & 30 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} \text{Hypoth. I} & \propto & 140 \\ \text{Error II} & \propto & 30 \end{array}} \right\} M$ <hr style="width: 100%;"/> $\begin{array}{rcl} \text{Prod.} & & 4200 \\ & & \text{Error.} \\ & & \text{Error} \end{array}$ <hr style="width: 100%;"/> $\text{Different. Error} \quad 30$	$\begin{array}{rcl} \text{Hypoth. II} & \propto & 130 \\ \text{Error I} & \propto & 60 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} \text{Hypoth. II} & \propto & 130 \\ \text{Error I} & \propto & 60 \end{array}} \right\} M$ <hr style="width: 100%;"/> $\begin{array}{rcl} \text{Prod.} & & 7800 \\ & & 60 \\ & & 30 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} \text{Prod.} & & 7800 \\ & & 60 \\ & & 30 \end{array}} \right\} S$ <hr style="width: 100%;"/> $\text{Different. Error} \quad 30$
---	--

$$D \left\{ \begin{array}{l} \text{Prod.} \quad 7800 \\ \text{Prod.} \quad 4200 \end{array} \right\} S$$

$$D \left\{ \begin{array}{l} \text{Diff. Productorum} \quad 3600 \\ \text{Diff. Errorum} \quad 30 \end{array} \right. \text{Venit rursus } 120 \text{ ut supra.}$$

Solutio III.

Ubi unus error est defectivus, alter excessivus, adeoque spectans ad Casum II.

Hypothesis

$$\begin{array}{rcl} \text{Lucrum I} & \propto & 10 \\ \text{Adde } 12 & & \\ \text{Lucrum II} & \propto & 22 \\ \text{Adde } 16 & & \\ \text{Lucrum III} & \propto & 38 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} \text{Lucrum I} & \propto & 10 \\ \text{Adde } 12 & & \\ \text{Lucrum II} & \propto & 22 \\ \text{Adde } 16 & & \\ \text{Lucrum III} & \propto & 38 \end{array}} \right\} A$$

$$\begin{array}{rcl} & & 70 \text{ minus} \\ & & \text{dato.} \\ & & 400 \\ & & 70 \end{array}$$

330 Error I defectivus.

Hypothesis II.

$$\begin{array}{rcl} \text{Lucrum I} & \propto & 150 \\ \text{Adde } 12 & & \\ \text{Lucrum II} & \propto & 162 \\ \text{Adde } 16 & & \\ \text{Lucrum III} & \propto & 178 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} \text{Lucrum I} & \propto & 150 \\ \text{Adde } 12 & & \\ \text{Lucrum II} & \propto & 162 \\ \text{Adde } 16 & & \\ \text{Lucrum III} & \propto & 178 \end{array}} \right\} A$$

$$\begin{array}{rcl} S \{ & 490 \text{ majus} \\ & 480 \text{ dato} \\ & 90 \text{ Error} \\ & \text{II Ex-} \\ & \text{cessi-} \\ & \text{vus.} \end{array}$$

Hypoth. I. 10	Hyp. II 150	Error 330
Error. II. 90	Error I 330	Error 90
Prod. 900	Prod. 49500	Sum. Er. 420
..... 900	
D { Summa Prod. 50400.		
D { Summa Error. 420.		

Venit 120 Numerus quæsitus ut ante.

EXEMPLUM II.

Tres A. B. C. habent singuli pecuniam. A & B habent simul florenos 50. B & C 70. C & A 60. Quæritur pecunia singulorum.

Hypothesis. I

Habuerit A 10
Ergo B 40
Adeoque C 30
Quare habebunt
A & C 40. minus
quam datum est.

$$\begin{array}{r} 60 \\ 40 \\ \hline 20 \end{array} \} S$$

Error I defectivus.

Hypothesis II.

Habuerit A 6
Ergo B 44
Adeoque C 26
Quare habebunt
A & C 32. minus
dato.

Pertinet ad
Casum
Primum.

$$\begin{array}{r} 60 \\ 32 \\ \hline 28. \end{array} \} S$$

Error II. defectivus.

Hypoth.

De Regula Duplicis Positionis. §29

Hypoth. I 10	} M	Hypoth. II 6	} M	Error 28	} S
Error II 28		Error I 20		Error 20	
Prod. 280	} S	Prod. 120	}	Diff. Er. 8	}
Prod. 120					
Diff. prod. 160					

$\frac{160}{8} \{ 20 \text{ pro A}$

Ergo 30 pro B

Et 40 pro C

Solutio II per defectum & excessum.

Hypothesis I	Hypoth. II.
Habuerit A 15	A 30
Ergo B 35	B 20
Adeoque C 35	C 50
Ergo A & C 50. minus	A & C 80 plus
quam 60	qui 60
Eritque 10 Error defectivus.	Ergo 20 Error excessivus.

Hypoth. I 15	} M	Hyp. II 30	} M	Error 20	} A
Error II 20		Err. I 10		Error 10	
Prod. 300	} A	300	}	Sum. Err. 30	}
300					

Sum. Prod. 600
Sum. Error. 30 } venit 20 ut supra.

Solutio III per Simplicem Positionem.

Summis datis 50. 70. 60, querantur tres proportionales; posita prima 10. Fiat.

$$50 \sim 70 \equiv 10 / 14. \text{ Secunda.}$$

$$50 \sim 60 \equiv 10 / 12. \text{ Tertia.}$$

Adeoque juxta hanc nostram positionem habuerit

$$\begin{array}{r} \text{A. B. } 10 \\ \text{B. C. } 14 \\ \text{C. A. } 12 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} \text{A. B. } 10 \\ \text{B. C. } 14 \\ \text{C. A. } 12 \end{array}} \right\} \text{A.}$$

$$2 \text{ A. } 2 \text{ B. } 2 \text{ C. } 36$$

$$\begin{array}{r} \text{A. B. C. } 18 \\ \text{A. B. } 10 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} \text{A. B. C. } 18 \\ \text{A. B. } 10 \end{array}} \right\} \text{S}$$

$$\begin{array}{r} \text{C. } 8 \\ \text{Ergo A. } 4 \\ \text{Et B. } 6 \end{array}$$

Ergo

C. A habuerunt 12. qui debet esse 60.

Quare

Quare fiat. 6

$$\begin{array}{rcl}
 \text{A. B} & & \text{A. B} \\
 15 \quad \underbrace{\hspace{1cm}} & 4 = & 15 / 20 \\
 & \text{Vel} & 5 \\
 \text{A. C.} & & \text{A. C.} \quad \text{A} \\
 12 \quad \underbrace{\hspace{1cm}} & 4 = & 60 / 20
 \end{array}$$

Solutio IV absque Regula Positionis.

Quod si cum ipsis Summis datis præcedamus, ut cum illarum summis proportionalibus modo factum est, facillime eadem Quæstio resolvi poterit.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{A. C.} & 50 & \\
 \text{B C} & 70 & \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{A. C.} \\ \text{B C} \end{array}} \right\} \text{A.} \\
 \text{C. A} & 60 & \\
 \hline
 \text{A. B. C.} & 180 & \\
 & \text{bis} & \\
 \hline
 & & \text{Div. p 2} \\
 \text{B B C} & 90 & \\
 \text{A B} & 50 & \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{B B C} \\ \text{A B} \end{array}} \right\} \text{S} \\
 \hline
 & \text{C} & 40 \\
 & \text{Ergo B} & 30 \\
 & \text{Adeoque A} & 20 \text{ ut req.}
 \end{array}$$

EXEM.

E X E M P L U M III.

Resumamus illustre illud Exemplum Coronæ Hieronis Regis, quod in præcedentibus Regulæ Alligationis fecimus subiectum.

Corona mixta pendens 100 ℥. ejecerit pintas aquæ 24.
 Massa aurea 100 ℥. 20.
 argentea 100 ℥. 36.

Quæritur rursus quantum argenti fuerit auro immixtum.

Hypothesis I.

Ponatur fuisse in Corona.

20 ℥ Argenti.

Ergo 80 ℥ Auri.

Fiat.

Auri ℥	Pintæ.	Auri ℥	Pint.	} A
100	20	80	16. f. $\frac{80}{5}$	
Tum				
Arg. ℥	Pintæ	Arg. ℥.	Pint.	} A
100	36	20	$\frac{36}{5}$	
5		1		
				116 minus justo.
				5

Sed debebat esse 24.

$$\begin{array}{r} \text{scu } 120 \\ \hline 5 \\ \hline 116 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 120 \\ 5 \\ 116 \end{array}} \right\} S$$

Pertinet ad
Casum 2.

$$\begin{array}{r} 4 \\ \hline 5 \end{array} \text{ Error I defectivus.}$$

Hypoth.

Hypothesis II.

Ponatur fuisse in Corona

40 ss Argenti

Ergo 60 ss Auri.

Fiat rursus

Auri ss Pint. Auri ss Pint.

100 ss \sim 20 ss \equiv 60 / 12 f. 60

Tum

Arg. ss

100 ss \sim 36 ss \equiv 40 / 72

5

2

5

plus justo. $\frac{132}{5}$

Debebat autem esse 24.

f. 120 } 3
5 } S
232 } ex
5 }

$\frac{12}{5}$ Error II excessivus.

Hypothesis

$$\begin{array}{l} \text{Hypoth. I } 20 \left\{ \begin{array}{l} \text{Hyp. II } 40 \\ \text{Error I } \frac{12}{5} \end{array} \right\}^M \left\{ \begin{array}{l} \text{Err. I } \frac{4}{5} \\ \text{Err. II } \frac{12}{5} \end{array} \right\}^M \left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{5} \\ \frac{12}{5} \end{array} \right\}^A \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Prod. } \frac{240}{5} \quad \text{Prod. } \frac{160}{5} \quad \text{Sum. Err. } \frac{16}{5} \end{array}$$

$$\text{Prod. } \frac{240}{5} \left\{ \right\}^A$$

$$\text{Prod. } \frac{160}{5} \left\{ \right\}$$

$$\text{Sam. prodd. } \frac{400}{5} \text{ Div. per } \frac{16}{5} \text{ Sum. Errorum.}$$

Venit quoties 25. Numerus \mathfrak{ss} Argenti
Ergo fuerunt 75 \mathfrak{ss} Auri.

EXEMPLVM IV.

Dux Urbes A. B. à se invicem distant intervallo 100 Milliarium. Contingit autem ut uno eodem momento ex duabus istis urbibus duo Tabellarii sibi invicem obviam profisciscantur. Ille qui ex A venit singulis diebus conficit

$1 \frac{1}{2}$ miliare plus quam Alter ex B ipsi obviam pro-

cedens. Quæritur quando die decimo conveniunt, quot miliaria singuli Tabellarii quotidie emensi sunt.

De Regula Duplicis Positionis. 333

Hypothesis I.		Hypothesis II.	
Tabell. A fecerit. Ergo B		Tabell. A fecerit. Ergo B.	
$7\frac{1}{2} M$	6	$2 M$	$\frac{1}{2}$
<u>10</u>	<u>10</u>	<u>10</u>	<u>10</u>
A { 75	60	A { 20	5
60	:	5	:
S 135 distantia Urbium.		S 25 distantia Urbium.	
quæ debet		quæ debet	
esse 100		ex 100	
35 Err. I Excess.		75. Error II. Defect.	

Hyp. I 6	Hyp. II $\frac{1}{2}$	Err. I 35
Err. II 75	Err. I 35	Err. II 75
Prod. 450	35	Sum. Err. 110 f. 120
<u>2</u>	<u>2</u>	<u>2</u>
35	935	Div. per 220
2	2	2
Sum. prodd. 935	Venit quot. $4\frac{1}{4}$	pro Tab. Urbis B.
	Ergo $5\frac{3}{4}$	pro Altero Urb. A.

Examen pracedentis.

$\begin{array}{r} \text{A} \\ 5 \frac{3}{4} \\ \hline 10 \end{array}$	M	$\begin{array}{r} \text{B} \\ 4 \frac{1}{4} \\ \hline 10 \end{array}$
$\begin{array}{r} 50 \frac{30}{4} \\ 40 \frac{10}{4} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 50 \frac{30}{4} \\ 40 \frac{10}{4} \end{array}} \right\} \text{A}$		$\begin{array}{r} 40 \frac{10}{4} \end{array}$
100. ut requir.		

E X E M P L U M V.

Quidam conducit operarium ad tempus 6 Hebdomadum, ea conditione, ut quando operatur, quotidie lucretur 15 stuferos; quando vero non operatur, quotidie Dominus ipsi detrahat 5 stuferos. Jam autem finito 6 hebdomadarum spatio, iste operarius accipit 12 florenos. Quæritur quot dies operatus fuerit iste operarius: quot vero dies oriatus.

Nota 12 flor. faciunt 240 stuf.
 6 hebdomadæ 36 dies.

Hypoth.

Hypoth. I.		Hypoth. II.	
Laboraverit	Otiatus erit	Laborav. Ergo	Otiat. est
12 } M	24	20 Dies	16
15 } M	5	15	5
Lucr. 180 } S	120 Dam.	Luc. 300 } S	80 Dam.
120 } S		80 } S	
60. debet esse	240 S	220 debet esse	240 S
	60		220
	180		20

Error I. Defectivus.

Error II. iterum defect.

Hyp. I. 12 } M	Hyp. II. 20 } M	Err. I. 180 } S
Err. II. 20 } M	Err. I. 180 } M	Err. II. 20 } S
Prod. 240	Prod. 3600 } S	Diff. Er. 160
	240	Itaque
Diff. Prodd. 3360		Div. 3360/ venit 22
		160/ dies lab.

E X E M P L U M V I.

Quidam interrogatus quot haberet equos. Respondit, si illorum numero addas adhuc partem dimidiam, & partem tertiam ut & quartam minus duobus, erunt simul tot plures quam 36, quot jam sunt pauciores quam 36. Quæritur Numerus Equorum.

Notandum non posse sumi numerum majorem quam 36, quia quæstio expresse dicit esse equos pauciores quam 36.

Y Hypo-

Hypothesis I.

Fuerint Ergo 24 inf. 36 } A

$$\begin{array}{r}
 12 \\
 6 \quad \frac{1}{2} \\
 4 \quad \frac{1}{3} \\
 3 \quad \frac{1}{4} \\
 \hline
 25 \quad \frac{1}{2} \quad S \\
 2 \quad \frac{1}{2} \quad S \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 23. \text{ debet esse } 60 \\
 \vdots \quad \dots \quad 23 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} S$$

Error I defect. 37

Hypothesis II.

Fuerint. Ergo 30 inf. 36 } A

$$\begin{array}{r}
 6. \quad \frac{1}{2} \quad 66 \\
 3 \quad \frac{1}{2} \\
 2 \quad \frac{1}{3} \\
 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \\
 \hline
 12 \quad \frac{1}{2} \quad S \\
 3 \quad \frac{1}{2} \quad S \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 10 \frac{1}{2} \text{ debent esse } 66 \\
 \hline
 10 \frac{1}{2} \quad S \\
 \hline
 \end{array}$$

Error II defect. $55 \frac{1}{2}$

Hyp. I. 12	Hyp. II. 6	Err. $55 \frac{1}{2}$
Err. II. $55 \frac{1}{2}$	Error I. 37	Err. 37
Prod. S 666	Prod. 222	18 $\frac{1}{2}$
222.	37
444 f. 888	D. per 37	2

Venit 24 Numerus Equorum quæritus.

EXEM-

De Regula Duplicis Positionis. 339

EXEMPLUM VII.

A & B simul habent 400 florenos. Si pecuniæ A partem quartam addas pecuniæ B parti quintæ, & hujus summæ dimidium addas seorsim pecuniæ A & pecuniæ B, tum A & B, eundem florenorum Numerum habebunt.

Quæritur pecunia singulorum A & B.

Habuerit A Ergo B 100

$$300. \quad \frac{1}{5} \quad 20$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{4} \quad 75 \frac{1}{20} \text{ A} \\ \hline 95 \quad \frac{1}{2} \\ \hline 47 \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 300 \quad \text{Add.} \quad 100 \\ 47 \frac{1}{2} \quad 47 \frac{1}{2} \\ \hline 347 \frac{1}{2} \quad 147 \frac{1}{2} \\ 147 \frac{1}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{S} \\ \hline 200. \text{ Error I excessivus.} \end{array}$$

Hypoth. II,

Habuerit A. Ergo B 250

$$\frac{1}{4} \quad 37 \frac{1}{2} \quad 50 \quad \frac{1}{5}$$

$$\begin{array}{r} 37 \frac{1}{2} \text{ A.} \\ 50 \\ \hline 87 \frac{1}{2} \text{ f.} \\ \hline 175 \text{ div. p 2} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 175 \text{ f.} \quad 43 \frac{3}{4} \\ 4 \\ \hline 150 \text{ Add.} \quad 250 \\ 43 \frac{3}{4} \quad 43 \frac{3}{4} \\ \hline 193 \frac{3}{4} \quad 293 \frac{3}{4} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{S} \\ 193 \frac{3}{4} \\ \hline \end{array}$$

100. Error II defect.

Y 2

Hyp

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Hyp. I} & 300 & \} \text{M} \\
 \text{Err. II} & 100 & \} \\
 \hline
 & 30000 & \} \text{A} \\
 & 30000 & \} \\
 \hline
 \text{D} & 600 \overline{) 100} & \} 200 \text{ pro flor. A. Ergo etiam} \\
 & 3 & \} \\
 & & \} 200 \text{ pro flor. B.}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{rcl}
 \text{Hyp. II} & 150 & \} \text{M} \\
 \text{Err. I} & 200 & \} \\
 \hline
 & 30000 & \\
 \text{Sum. Err.} & 300 & \} \text{A}
 \end{array}$$

E X E M P L U M VIII.

Aliquis vendidit equum & aliquot oves hac ratione. Si 1 ovem dederit pro 5 florenis, tum omnium ovium pretium $\frac{1}{8}$ deficiet a pretio Equi. Quod si vero una ovis constiterit 6 florenis, tum omnium simul Ovium pretium $\frac{1}{8}$ minus 12 pretium superabit Equi. Quæritur Numerus Ovium & pretium Equi.

De Regula Duplicis Positionis. 341.

Hypoth. I.

Habuerit oves 8 } M
5 }

pret. omnium }
ovium 40 } A
 $\frac{1}{8}$ 5 }

pretium Equi. 45

Deinde

8 } M
6 }
pret. om. ov. 48 }
 $\frac{1}{8}$ 6 } S

42 } A
12 }

54. debet esse 45

54 } S
45 }

Err. I. Excessivus 9

Hypoth. II.

habuerit oves 16 } M
5 }

pret. omnium }
ovium 80 } A
 $\frac{1}{8}$ 10 }

pret. Equi 90

Deinde.

16
6
pret. ov. omn. 96 }
 $\frac{1}{8}$ 12 } S

84 } A
12 }

96 debet esse 90 } S
96 } ex

Err. II. excessivus. 6

Hyp. I. 8 } M	Hyp. II. 16 } M	Error I. 9 } S								
Err. II. 6 } M	Error I. 9 } M	Error II. 6 } S								
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: left; padding-right: 20px;">Prod. 48</td> <td style="text-align: left; padding-right: 20px;">Prod. 144 } S</td> <td style="text-align: left;">Diff. Errorum 3</td> </tr> <tr> <td style="text-align: left;">: 48</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>			Prod. 48	Prod. 144 } S	Diff. Errorum 3	: 48				
Prod. 48	Prod. 144 } S	Diff. Errorum 3								
: 48										
<table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">D 96</td> <td rowspan="2" style="font-size: 2em; vertical-align: middle;">}</td> <td rowspan="2" style="vertical-align: middle;">32</td> <td rowspan="2" style="vertical-align: middle;">}</td> <td rowspan="2" style="vertical-align: middle;">Numer. quæsit. Ovium.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="vertical-align: middle;">5</td> <td style="vertical-align: middle;">} M</td> </tr> </table>			D 96	}	32	}	Numer. quæsit. Ovium.	3	5	} M
D 96	}	32	}					Numer. quæsit. Ovium.		
3				5	} M					
<table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">160</td> <td rowspan="2" style="font-size: 2em; vertical-align: middle;">}</td> <td rowspan="2" style="vertical-align: middle;">A</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">20</td> </tr> </table>				160	}	A		20		
	160	}	A							
	20									
<table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; text-align: center;">8</td> </tr> </table>	1	8	<table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">180</td> <td style="padding-left: 10px;">Pretium Equi.</td> </tr> </table>		180	Pretium Equi.				
1										
8										
180	Pretium Equi.									

E X E M P L U M I X.

Pater moriens tribus filiis A. B. C. in bonis relinquit 1000 florenos, quos inter ipsos testamento divisit hunc in modum. A haberet aliquam bonorum partem. B haberet duplum portionis A minus 50 florenis : C haberet triplum partis A demtis 100 florenis. Quæritur portio singulorum.

Hypoth. I.

Habeat A 100 } M
2

A 100 } M
3

200 } S
50

300 } S
100

B 150

C 200

3
50

A. 100 }
B. 150 } A
C. 200 }

450. debet esse 1000

450

Error I defectivus.

550

Hypothesis II.

Habeat A 200 / M
2 /

A. 200 M
3

400 } S
50

600 } S
100

B 350

C 500

A 200 }
B 350 } A
C 500 }

S { 1050 debet esse 1000
1000

50. Error II. Excessivus.

Y 4

Hypot.

Hyp. I. 100	} M	Hyp. II. 200	} M	Error I. 550
Err. II 50		Err. I. 550		Error II. 50
Prod. 5000		Prod. 110000		<u>600</u>

5000 } A

$$D \frac{115000}{600} \left\{ \begin{array}{l} 191 \frac{2}{3} \\ 2 \end{array} \right\} M \quad \left| \begin{array}{l} \text{pro A } 191 \frac{2}{3} M \\ 3 \\ 3 \end{array} \right.$$

Adeoque
habere debent

$$\left. \begin{array}{l} A \ 191 \frac{2}{3} \\ B \ 333 \frac{1}{3} \\ C \ 475 \end{array} \right\} A$$

1000 ut requir.

$$\left. \begin{array}{l} 382 \frac{4}{3} \\ 50 \end{array} \right\} S \quad \left. \begin{array}{l} 575 \\ 100 \end{array} \right\} S$$

$$B \ 332 \frac{4}{3}$$

f.

$$B \ 333 \frac{1}{3}$$

E X E M P L U M X.

Dividere Numerum 50, in tres partes A. B. C. ita B duplum ipsius A superet per 3. Deinde ut C. summam ipsarum A & B superet per 5.

Quæruntur partes singulæ.

Hypothesis I.

$$\begin{array}{r}
 \text{Sit A } 4 \} M \\
 \quad 2 \} \\
 \hline
 8 \} A \\
 \quad 3 \} \\
 \hline
 B \ 11 \} A \\
 A \ 4 \} \\
 \hline
 15 \} A \\
 \quad 5 \} \\
 \hline
 C. \ 20
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 A \ 4 \} A \\
 B \ 11 \} \\
 C \ 20 \} \\
 \hline
 35 \text{ debet} \\
 \text{esse } 50 \} S \\
 \quad 35 \} \\
 \hline
 \text{Error I. } 15 \\
 \text{Defectivus.}
 \end{array}$$

Hypothesis I.

$$\begin{array}{r}
 \text{Sit A } 10 \} M \\
 \quad 2 \} \\
 \hline
 20 \} A \\
 \quad 3 \} \\
 \hline
 B \ 23 \} A \\
 A \ 10 \} \\
 \hline
 33 \} A \\
 \quad 5 \} \\
 \hline
 C \ 38
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 A \ 10 \\
 B \ 23 \\
 C \ 38 \\
 \hline
 S \{ 71 \text{ deb. esse} \\
 \quad 50 \\
 \hline
 21 \\
 \text{Err. II. Excef.}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{Hypoth. I } 4 \} M \\
 \text{Error II } 21 \} \\
 \hline
 84
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \text{Hyp. II } 10 \} \\
 \text{Err. I } 15 \} M \\
 \hline
 150 \\
 84 \\
 \hline
 66
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \text{Err. I. } 15 / A \\
 \text{Err. II. } 21 / A \\
 \hline
 36
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 D \left(\frac{234}{36} / 6 \frac{1}{2} \cdot \text{Pro A. Ergo} \right. \\
 16 \quad \text{pro B.} \\
 27 \frac{1}{2} \text{ pro C.} \\
 \hline
 50 \text{ ut requir.}
 \end{array}$$

*Demonstratio Regulae duplicis
Positionis.*

Casus I. utriusque Erroris per defectum.

Sit quaerendus valor x seu linea AB.

$\begin{array}{c} \text{I} \\ \text{A} \text{---} \text{L} \text{---} \text{B} \end{array}$	<p>Pro AB. I. Sit $AB \propto x$. $AL \propto b$. Ergo $LB \propto x - b \propto m$.</p>
$\begin{array}{c} \text{P} \\ \text{A} \text{---} \text{B} \\ \text{II} \end{array}$	<p>Pro AB. II. Sit $AB \propto x$. $AP \propto c$. Ergo $PB \propto x - c \propto n$.</p>

Positio I.

Pro invenienda $AB \propto x$ ponatur $AB \propto b$, quæ sit minor quam AB; eritque $LB \propto AB - AL$ seu $x - b$; quæ etiam unica litera dicatur m . Error I.

Positio II.

Pro invenienda $AB \propto x$ ponatur $AP \propto c$, minor quam AB; eritque $PB \propto x - c$; quæ etiam unica litera dicatur n . Error II.

Tum fiat per rationes æqualitatis

$$\frac{LB}{m} \sim \frac{LB}{x-b} = \frac{PB}{n} = \frac{PB}{x-c}$$

Multiplicando extrema & media.

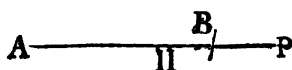
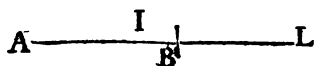
$$\frac{mx - mc \propto nx - nb.}{\frac{mx - nx \propto mc - nb.}{x \propto \frac{mc - nb}{m - n}}}$$

Quæ æquatio accurate proponit id omne, quod Regula continet; id quod hoc modo patet.

$\left. \begin{array}{l} \text{Hypoth. I } b \\ \text{Error II } n \end{array} \right\} M$	$\left \begin{array}{l} \text{Hypoth. II } c \\ \text{Error I } m \end{array} \right\} M$	$\left. \begin{array}{l} \text{Error } m \\ \text{Error } n \end{array} \right\} S$
$\frac{\text{Prod. } nb.}{\text{Prod. } mc}$	$\frac{\text{Prod. } nb.}{\text{Prod. } mc}$	$\left. \begin{array}{l} \text{Diff. Err. } m - n \end{array} \right\} S$
$\left. \begin{array}{l} \text{Diff. Prod. } mc - nb \\ \text{Diff. Prod. } m - n \end{array} \right\} D$		
$\text{Quotiens } \frac{mc - nb}{m - n} \propto x$		

Quo Casu rite percepto, facile intelligi poterit sequens

Casus I. Utriusque erroris per excessum.



Pro AB. I.
 Sit $AB \propto x$.
 $AL \propto b$
 Ergo $BL \propto b - x \propto m$

Pro AB. II.
 Sit $AB \propto x$.
 $AP \propto c$.
 Ergo $BP \propto c - x \propto n$.

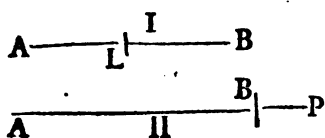
Quare

Quare fiat.

$$\begin{array}{r}
 \text{BL} \quad \text{BL} \quad \text{BP} \quad \text{BP} \\
 m \quad \text{b-x} \quad \text{=} \quad n \quad / \quad c-x \\
 \hline
 mc \quad - \quad mx \quad \infty \quad nb \quad - \quad nx \\
 \hline
 mc \quad - \quad nb \quad \infty \quad mx \quad - \quad nx. \\
 \hline
 mc \quad - \quad nb \quad \infty \quad x. \\
 \hline
 m \quad - \quad n
 \end{array}$$

Eadem cum priori.

*Casus II. ubi semel erratum est in excessu,
semel in defectu.*



Pro AB. I.
 Sit $AB \infty x$.
 $AL \infty b$.
 Ergo $LB \infty x-b \infty m$.

Pro AB. II.
 Sit $AB \infty x$.
 $AP \infty c$.
 Ergo $BP \infty c-x \infty n$

Fiat jam iterum.

$$\begin{array}{r}
 \text{LB} \quad \text{LB} \quad \text{BP} \quad \text{PP} \\
 m \quad \text{x-b} \quad \text{=} \quad n \quad / \quad c-x \\
 \hline
 mc \quad - \quad mx \quad \infty \quad nx \quad - \quad nb. \\
 \hline
 mc \quad + \quad nb \quad \infty \quad mx \quad + \quad nx. \\
 \hline
 mc \quad + \quad nb \\
 \hline
 m \quad + \quad n \quad \infty \quad x.
 \end{array}$$

Quare

Exercitium Præcedentium Regul. 349

Quæ æquatio iterum totius Regulæ continet operationem.

$$\begin{array}{r}
 \text{Hypoth. I } b \} M \quad \left| \text{Hyp. II. } c \} M \quad \left| \text{Error I. } m \} A \right. \\
 \text{Error. II. } n \} \quad \left| \text{Error I. } m \} \quad \left| \text{Error II. } n \} \right. \\
 \hline
 \text{Prod. } nb \quad \quad \text{Prod. } mc \} A \quad \quad \text{Summa Er. } m+n \\
 \quad \quad \quad \text{Prod. } nc \} \\
 \hline
 \text{Sum. Prodd. } mc+nb \} D \\
 \text{Sum. Error. } m+n \} \\
 \hline
 \text{Quotiens } \frac{mc+nb}{m+n} \propto x.
 \end{array}$$

C A P. X I.

Exercitium Præcedentium Regularum.

E X E M P L U M I.

Si 2 ℥ Piperis constant 25 stuf. Quanti constabunt
 60 ℥ Garyophyllorum, cum 3 ℥ Garyoph. valeant
 tantum quantum 16 ℥ Piperis.

Solutio I per Regulam Catenarium.

$$\begin{array}{rcl}
 & 8 & \\
 \text{℥ Garyoph. } 3 & \propto & 16 \text{ ℥ Piperis.} \\
 \text{℥ Piperis } 2 & \propto & 25 \text{ stuf.} \\
 \text{Stuferi } Q & \propto & 60 \text{ ℥ Garyoph.} \\
 & 20 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ 8 \\ \hline 200 \\ 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} Q \propto 4000 \text{ stuf.} \\ Q \propto 200 \text{ flor.} \end{array}$$

Solutio II. Per Regulam Proportionis.

$$\begin{array}{l} \text{℥ Pip. stuf.} \quad \text{℥ Pip. / stuf.} \\ 2 \sim 25 = 16 / 200 \text{ f. 10 flor.} \propto 3 \text{ ℥ Garyoph.} \\ 1 \quad \quad \quad 8 / \end{array}$$

Tum

$$\begin{array}{l} \text{℥ Garyoph. Flor.} \quad \text{℥ Garyoph. flor.} \\ 3 \sim 10 = 60 / 200. \text{ ut supra.} \end{array}$$

EXEMPLUM II.

Si quis mensibus 4 tantum consumat, quantum 3 mensibus lucratur. Lucratur autem 6 mensibus flor: 150. Quæritur quantum lucri tempore anni ipsi erit residuum.

$$\begin{array}{l} \text{Menses 3. Lucrum. 75.} \\ \quad \quad \quad 4. \quad \quad \quad 4. \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Menses 3. Lucrum. 75.} \\ \quad \quad \quad 4. \quad \quad \quad 4. \end{array}} \right\} \text{M.}$$

Annus 12.	300	—
Deinde.		
Menses 4	Consumptio 73	} M S
5	3	
Annus 12	225	—

75 Numerus florenorum quos pro lucro fine anni residuos habebit.

EXEM-

E X E M P L U M III.

Si quis 4 ulnas vendat 3 flor. tum accipiendo 78 flor. lucratur 13 florenos. Quær. quot flor. debeat vendere 10 ulnas, ut accipiendo flor. 112, lucretur 12.

Fiat.

Accip. Lucrum Accip. / Lucrum

$$\begin{array}{l} 78 \quad \sim \quad 13 \\ 13 \quad \quad \quad 1 \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 13 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array} \quad / \quad \frac{1}{2} \quad \text{Ergo ulnæ 4} \\ \text{constant } 2\frac{1}{2} \text{ fl.}$$

Tum.

$$\begin{array}{l} \text{Ulnæ} \quad \text{pretium} \quad \text{ulnæ} / \text{pretium.} \\ 4 \quad \sim \quad 2\frac{1}{2} \quad \quad \quad 10 \quad / \quad 6\frac{1}{4} \end{array}$$

Denique

$$\begin{array}{l} \text{Pro flor.} \quad \text{Accip.} \quad \text{pro flor.} \quad \text{Accip.} \\ 100 \quad \sim \quad 112 \quad \quad \quad 6\frac{1}{4} \quad / \quad 7 \end{array}$$

Ergo debet vendere 10 ulnas 7 florenis.

E X E M P L U M IV.

Si quis 3 mensibus lucratur 45 florenos, Quæritur quantum debeat consumere 4 mensibus, ut finito anno ex lucro reservet 36 florenos ad emendum pallium.

Solutio.

Solutio.

Mensibus lucr. Flor. Mens. / Flor.

$$\begin{array}{r} 2 \text{ ---} 45 = 12 / 180 \\ 1 \qquad \qquad 4 / \quad 36 \\ \hline 144 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} 2 \text{ ---} 45 = 12 / 180 \\ 1 \qquad \qquad 4 / \quad 36 \\ \hline 144 \end{array}} \right\} S$$

Floreni quos
ex lucro re-
servare vult.Floreni quos 12 mensibus debet
consumere.

Tum fiat.

Mensibus consumit Flor. Mens. / Flor.

$$\begin{array}{r} 12 \text{ ---} 144 = 4 / 48, \text{ quos singulis 4} \\ 1 \qquad \qquad 12 \qquad \qquad \text{mensibus consumit.} \end{array}$$

E X E M P L U M V.

Aliquis emit Hypothecam florenorum 675 cum lucro
50 florenorum. Quæritur quanti eam rursus vendere de-
beat, ut floreni 100 lucentur 4 florens.

Solutio.

$$S \left\{ \begin{array}{l} 675 \text{ Hypoth.} \\ 50 \text{ Lucrum factum} \end{array} \right.$$

625 Pretium quo emta est.

Tum fiat.

Pro Florens accipimus Flor. pro Flor. / Flor.

$$\begin{array}{r} 100 \text{ ---} 100 = 128 / 650. \\ 4 \qquad \qquad 82 \qquad \qquad 25 / \\ 2 \qquad \qquad 26 \qquad \qquad 26 / \\ 1 \qquad \qquad \hline 150 \\ \hline 50 \\ \hline 650 \end{array}$$

EXEM-

E X E M P L V M VI.

Canis leporem persequens facit saltus 27 quoties lepus facit 25. Si jam ponamus saltus esse æquales utriusque, & leporem antecisse Canem saltibus 50. Quæritur quot saltibus Canis Leporem debeat attingere.

Solutio hoc modo obtinetur.

Si lepus Canem præcedit 2 saltibus, canis ipsum assequitur saltibus 27. Ergo si præcedat saltibus 50, quot saltibus ipsum assequetur Canis.

$$\begin{array}{rcl} 2 \sim 27 & = & 10 / 675. \text{ Numerus saltuum quæ-} \\ 1 & & 25 / \text{ situs quibus Canis opus} \\ & & \text{habeat.} \end{array}$$

E X E M P L V M VII.

Maritus quidam diebus 20 bibit dolium cerevisiæ quando bibit solus; si vero ex eodem vase cum Uxore bibat, illud 12 diebus evacuabunt. Quæritur quot diebus Uxor sola absque marito idem Vas ebibet.

Sic procedendum.

$$\begin{array}{lcl} \text{Marit. Die. Vas Die / Vasis} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{20} \end{array} \right. & \begin{array}{l} 60 \\ 5 \end{array} \\ 20 \sim 1 = 1 / \frac{1}{20} & & \\ \text{Marit. Dieb. Vas Die Vasis} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{20} \end{array} \right. & \begin{array}{l} 3 \\ 3 \end{array} \\ \& \text{ uxor } 12 \sim 1 = 1 & \frac{1}{12} & \begin{array}{l} 12 \\ 60 \end{array} \end{array}$$

Ergo uxor uno die bibit $\frac{1}{30}$ istius dolii, adeoque 30 diebus evacuabit totum dolium.

E X E M P L U M VIII.

A solvit ipsi B 300 flor. 4 mensibus serius quam oportet: ut & 700 flor. 3 mensibus serius. Quæritur quot mensibus post pactum tempus B ipsi A solvere debeat 750 florenos.

Hoc modo quæstio commode solvitur.

Flor.	Menses	
A . . . 300 . . .	4	/ 1200
	M	/
700	3	/ 2100
		<u>3300</u>

Tum

$$B . . . 750 \text{ M p } Q / 750 \text{ Q}$$

Quare erit

$$\frac{750 \text{ Q} \propto 3300}{\text{Div. per } 750.}$$

$$Q \propto 4 \frac{30}{75} \text{ Menses.}$$

Hoc est 4 menses 12 dies.

E X E M P L U M IX.

Quidam debet solvere 500 flor. statim. 800 flor. post 6, & 700 fl. post 5 menses: quæritur post Quot menses hosce florenos debeat simul solvere.

Flor.

Flor.	Menses		
500	0	0	} A
800	M 6	4800	
700	5	3500	
2000		8300	

Ponatur ipsum debere totam summam 2000 solvere Mensibus Q.

Eritque

$$\frac{2000 \text{ Q} \infty 8300}{\text{Div. p } 20} = \text{Q} \infty 4 \frac{3}{20} \text{ mens.}$$

EXEMPLUM X.

Tres Coloni villam empturi, tantum in ære non habent, ut unus ex illis solus esset solvendo, venit enim florenis 1200. Quare conveniunt ut Titius dimidiam, Mævius Tertiam, & Baldus quartam dictæ summæ partem solvat. Quæritur quantum unusquisqueolvere debeat.

Quæ quæstio per Regulam Societatis facile sic expeditur.

			Tum fiat.	
$\frac{1}{2}$	$\frac{12}{6}$	$\frac{13}{12} \sim 1200 = \frac{1}{2} / \frac{7200}{13} \infty 553 \frac{11}{13}$	Pro Ti-	
	6		tio.	
$\frac{1}{3}$	$\frac{12}{4}$	$\frac{13}{12} \sim 1200 = \frac{1}{3} / \frac{4800}{13} \infty 369 \frac{3}{13}$	Pro Mæ-	
	4		vio.	
$\frac{1}{4}$	$\frac{12}{3}$	$\frac{13}{12} \sim 1200 = \frac{1}{4} / \frac{3600}{13} \infty 276 \frac{12}{13}$	Pro Bal-	
	3		do.	
	$\frac{13}{12}$			
	3			

Sum. terminorum Rationis.

1200 ut req.

Scholium.

Primo intuitu hæc quæstio nullius videtur esse difficultatis, cum putaret requiri aliquis, ut Titius solveret flor. 600. Mævius 400, & Baldus 300: quando nim. verbis quæstionis erit satisfactum. At vero si hosce florenos simul addamus, facient 1300. non vero 1200, adeoque plus justo pretio erit persolutum.

E X E M P L U M X I.

Quidam aliquot habens florenos, Primo suo Amico illorum dat semissim cum duobus florenis. Deinde Residuorum florenorum semissim cum duobus Secundo Amico dat: Et illorum qui ipsi tum adhuc restant semissim cum duobus tertio largitur Amico.

Quæritur quando ipsi florenus unus restat; quot habuerit initio?

Per Regulam duplicis Positionis sic procedatur.

Hypoth. I.
Habuerit fl. $\left\{ \begin{array}{l} 60 \\ 32 \text{ Sem.} + 2 \end{array} \right.$
<hr style="width: 100%;"/> $\left\{ \begin{array}{l} 28 \\ 16 \text{ Sem.} + 2 \end{array} \right.$
<hr style="width: 100%;"/> $\left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 8 \text{ Sem.} + 2 \end{array} \right.$
<hr style="width: 100%;"/> $\left\{ \begin{array}{l} 4 \text{ deb. esse } 1 \\ 1 \end{array} \right.$
<hr style="width: 100%;"/> <p>3. Error I Excessivus</p>

Hypoth. II.
Habuerit $\left\{ \begin{array}{l} 100 \\ 52 \text{ Sem.} + 2 \end{array} \right.$
<hr style="width: 100%;"/> $\left\{ \begin{array}{l} 48 \\ 26 \text{ Sem.} + 2 \end{array} \right.$
<hr style="width: 100%;"/> $\left\{ \begin{array}{l} 22 \\ 13 \text{ Sem.} + 2 \end{array} \right.$
<hr style="width: 100%;"/> $\left\{ \begin{array}{l} 9 \text{ deb. esse } 2 \\ 1 \end{array} \right.$
<hr style="width: 100%;"/> <p>8. Error II Excessiv. Hyp. I:</p>

Hyp. I. 60	}M	Hyp. II. 100	}M	Error II. 8	}
Err. II. 8		Error II. 3		Error I. 3	
Prod. 480	}S	Prod. 300	}	Diff. Error 8	}
Prod. 300					
Diff. Pr. 180	}D				
Diff. Err. 5					

36. Numerus florenorum quæſitus.

Alia Solutio.

Ponatur florenus residuus	1	}A
Flor. quos tertio, supra	2	
$\frac{1}{2}$ donavit	3	M per 2
	6	}A
Flor. quos secundo supra	2	
$\frac{1}{2}$ donavit	8	M. per 2
	16	}A
Flor. quos primo supra	2	
$\frac{1}{2}$ donavit	18	M. per 2
	36	

Numerus quærendus, ut facile per Examen patet.
Hæc solutio procedit ordine retrogrado.

E X E M P L U M XII.

Paterfamilias mortis agonem sentiens, uxoremque gravidam relicturus ultimam voluntatem suam esse coram testibus pronunciat. Si Uxor Filium pepererit, illum e bonis paternis $\frac{2}{3}$ Matrem $\frac{1}{3}$ accepturam. Si vero pariat filiam illam $\frac{1}{3}$ & matrem $\frac{2}{3}$ sibi sumpturas. Quæritur si pater relinquat 3000, & uxor pariat duas filias & filium, quomodo illa summa ex tenore Testamenti sit dividenda.

Ubi Ratiocinium sic instituendum.

Filii Portio dupla ponitur Portionis Matris: Hujus autem dupla portiois Filia.

Quare si ponamus accipere

Filiam I.	1.	} A.
Filiam II	1.	
Accipiet Mater	2.	
Filius	4.	

Summa terminorum rationem exprimentium 8.

Tum fiat.

8	3000	1	/	375	pro Filia I.
8	3000	1	/	375	pro Filia II.
8	3000	2	/	750	pro Matre.
8	3000	4	/	1500	pro Filio.
				<hr/>	
				3000 Tota hæreditas.	

E X E M P L U M XIII.

Ova olim juvenes duo ferebant

B Horum sic comitem læcessit alter.

Unum si dederis mihi tuorum

Ovorum, Numerus mihi tibi que

A Par erit; cui mox regeffit alter

Tu si mihi dederis unum tuorum

Duplo plura ego bajulabo quam tu.

Dic ergo tulerit quot ova uterque?

Solutio per Regulam duplicis Positionis.

Habuerit.

Hypoth. I.

H. 2) Add.
1)

10. Ergo B habuit 6) Add. S { A 9
1) 7 deberet esse 8

Error L. defectivus est 1.

Z 4

Hypoth.

Hypoth. II. Habuerit A $\left. \begin{smallmatrix} 5 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}$ add.

$\frac{6}{1}$ Ergo B $\left. \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}$ ad. A $\left. \begin{smallmatrix} 5 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}$ Subt.
 5. deb. esse 4

Adeoque Error II. est iterum 1. Excessivus.

Hypoth. I. 9	} M.	Hyp. I. 5	} M.	Error I ∞ 1	} A
Error II. 1		Err. I. 1		Error II ∞ 1	
Prod. 9		Prod. 5		Summ. Err. ∞ 2.	
Prod. 5	} adde	rod.			
Sum Prodd. 14					
Sum. Err. 2	{	7. Numerus ovorum quæ habuit A.			

$\frac{7}{1}$
 8. Ergo B habuit 5 ova.

Quam solutionem Carmine sic Expressam invenio.

Tot prior ova talit, quot Lustrum continet annos 5
 Posterior vaga quot sydera Mundus habet 7

EXEMPLUM XIV.

Leo solus ovem una hora, Lupus 4 horis, Canis 6 horis devorant. Quæritur, quo temporis spatio, simul ovem devorabunt.

Hæc quæstio simplicis Positionis Regula sic resolvitur.

Ponatur ad hoc requiri $\frac{1}{2}$ horæ.

Fiat.

Exercitium Præcedentium Regul. 361

Fiat.

	Hora	Ovem			
Leo	1	~ 1	$\frac{1}{2}$	/	$\frac{1}{2}$
Lupus	4	~ 1	$\frac{1}{2}$	/	$\frac{1}{8}$
Canis	6	~ 1	$\frac{1}{2}$	/	$\frac{1}{12}$
					24
					12
					3
					2

$\frac{17}{24}$ debet autem ef-
 $\frac{24}{24}$ se $\frac{24}{24}$ hoc est tota
 Ovis.

Quare ponatur.

Ovis	Hora			
17	~ 1	$\frac{1}{2}$	/	$\frac{12}{17}$
24	2	$\frac{1}{2}$	/	$\frac{12}{17}$
34		12	/	42
17				6
				17

horæ. hoc est
 munitis

ARITHMETICÆ

PARS III.

Post traditas varias Arithmeticæ Regulas, earumque in quibusdam exemplis exercitium, operæ pretium facturum me putavi, si de Progressionibus aliquid subjungerem, siquidem, quamplurimæ occurrunt quæstiones, non utiles modo, sed & maxime jucundæ, quæ citra mediocrem saltem illarum notitiam omnem nostram eludunt operam.

Quare ne illarum aliquali pertractione Tyrones destituamus, Progressiones Arithmeticas & Geometricas, omissis Harmonicis, ita proponemus, ut prius illarum naturam & præcipuas proprietates tradamus; deinde problemata circa illas proponi solita, juxta Regulas claras & perspicuas resolvamus; & tandem subjunctis variis ad utramque Progressionis speciem spectantibus exemplis, istam materiam concludamus.

C A P. I.

De Progressione Arithmetica.

Progressio est series Numerorum se invicem in ordine sequentium.

Id quod duobus modis potest fieri.

Vel enim se sequuntur cum æquali & eadem differentia, ita ut se invicem æquali semper excessu superent.

Vel procedunt cum æquali & semper eadem Ratione.

Genus primum constituit Progressionem Arithmeticam.

Secundum vero exhibet Progressionem Geometricam

Ita-

Pars III. Cap. I. De progressionē Arithm. 363

Itaque

Progressio Arithmetica est series Numerorum, qui se invicem cum æquali semper excessu seu differentia sequuntur.

Ita sc. ut primus terminus tantum deficiat à secundo, quantum hic à tertio; & secundus à tertio, quantum hic à quarto: & sic porro in infinitum, quando progressio est ascendens.

Vel quando est descendens, ut primus secundum tantum excedat quantum hic tertium; & secundus tertium, quantum hic quartum & sic porro.

In Progressione Arithmetica: sunt hæc series.

I, Numeri naturali ordine procedentes.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. &c. &c. ubi differentia est 1

II. Numeri impares, se invicem sequentes

1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. ubi differentia est 2.

III. Numeri omnes pares se consequentes.

IV. In genere omnes numeri per quamlibet cunque differentiam procedentes.

1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. ubi differentia est 3.

1. 5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. 33. ubi differentia est 4.

1. 6. 11. 16. 21. 26. 31. 36. 41. ubi differentia est 5.

Et sic porro in infinitum assumendo quemcunque Numerum, pro communi differentia seu excessu

Theorema I.

In Progressione Arithmetica trium terminorum, aggregatum terminorum extremorum esse ∞ duplo medii.

3	4	5	2	4	6	12	18	24
..	2	2	2	..
..	8	8	36	..
.....8.....8.....36.....						

Theo.

Theorema II.

In Progressione Arithmetica quatuor terminorum aggregatum extremorum est ∞ aggregato mediorum.

2	3	4	5		1	6	11	16		4	12	30	38
:	:	:	:		:	:	:	:		:	:	:	:
:	:	7	:		:	:	17	:		:	:	42	:
:	:	7	:		:	:	17	:		:	:	42	:

In duobus prioribus Exemplis progressio est continuata à termino ad terminum usque ad ultimum.

In posteriori vero est interrupta: non enim datur idem excessus inter 4 & 12, qui inter 12 & 30: sed & ibi intermissus iterum repetitur inter 30 & 38.

Theorema III.

In omni Progressione Arithmetica, cujus numerus terminorum est impar, Aggregatum extremorum est ∞ cuiuslibet aggregato numerorum quorum libet ab extremis æqualiter distantium: Ut & duplo termini medii.

2	3	4	5	6		7	9	11	13	15	17	19
:	:	2	:	:		:	:	:	2	:	:	:
:	:	8	:	:		:	:	:	26	:	:	:
:	:	8	:	:		:	:	:	26	:	:	:
:	:	8	:	:		:	:	:	26	:	:	:
:	:	8	:	:		:	:	:	26	:	:	:
:	:	8	:	:		:	:	:	26	:	:	:

Theo-

Theorema IV.

In omni Progressione Arithmetica terminorum numero parim, aggregatum extremorum est ∞ cuilibet aggregato duorum quorumlibet ad extremo æqualiter distantium.

1	3	5	7	9	11		2	6	10	14	18	22	26	30
.
.	.	..12..32..
.
.	...	12...32..
.
.....	12	32
.
.	32

Hiscæ Theorematibus præmissis, quæ primarias & fundamentales Arithmeticæ Progressionis continent Proprietates, ad Problemata transitum facimus; quæ circa eandem Progressionem proponi possunt.

Quæ ut ordine proponantur, notandum est in omni Arithmetica progressionem quinque res diversas debere considerari; quæ sunt.

- I. Terminus Minimus.
- II. Terminus Maximus.
- III. Numerus Terminorum.
- IV. Communis differentia.
- V. Summa Progressionis.

Quia jam ex hisce quinque semper tria debent esse nota, ad inveniendâ reliqua duo; & ex quinque diversis possunt elici 10 terniones (ut postea videbimus) etiam 10 diversa

diversa erui poterunt Problemata circa omnes progressionis Arithmeticas solvenda.

Quæ nos hic etiam addere proposuimus cum suis solutionibus nullis tamen demonstrationibus munitis; tum ut nimiam evitemus prolixitatem: tum quia illarum fundamentum fuisse videri potest apud Tacquetum in sua Arithmetica Practica. Et Schotenium in suis Exercitationibus Mathematicis pag. 436 & seqq. ubi illorum Problematum solutiones ex calculo Algebraico deducit.

Problema I.

Datis termino Minimo & maximo, & Numero Terminorum invenire Progressionis summam & Communem Differentiam.

Pro Primo. Regula.

Summam Extremorum (sc. minimi & maximi) Multiplica per semissim Numeri terminorum, Productum erit Summa quæsitæ.

Vel

Dimidiam Summam Extremorum multiplica per Numerum terminorum.

Vel

Summam Extremorum multiplica per Numerum terminorum & Productum divide bifariam.

Sic si proponatur Progressio, quam omnibus Problematis applicabimus.

1. 3. 7. 5. 9. 11.

Ubi Terminus minimus est 1

maximus 11

Terminorum Numerus 6

Communis Differentia 2

Progressionis Summa 36

Reg. I.	Reg. II.	Reg. III.
1 Minimus } A	6 Dim. Sum. } M	12 Summa } M
11 Maximus } A	Extr. } M	Extrem. } M
12 Sum. Extr. } M	6 Numer. } M	6 Numer. } M
3 Sem. Num. } M	Term. } M	Term. } M
Term, } M	36 Progr. Summa.	72
36 Summa Progr.		$\frac{1}{2}$
		36 Summa Progr.

Pro Secundo. Regula.

Terminum minimum subtrahere à maximo. Residuum divide per Numerum terminorum, unitate multiplicatum. Quotiens erit differentia quæsitæ.

$$\begin{array}{r} 11 \text{ Term. maximus} \\ 1 \text{ maximus} \end{array} \} S$$

$$\begin{array}{r} 10 \text{ Residuum} \\ 5 \text{ Numerus term.} \end{array} \} D$$

2. Communis Differentia.

Scholium.

Cum inventio Progressionis Arithmeticae Summae principalem haud raro Problematum faciat Scopum, sequentes Regulas notare minime superfluum ducimus.

In Progressione Naturali numerorum ab 1 incipientium 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. fiat

Regula,

Terminum maximum 8 multiplica per Numerum
ma-

maximo proxime maiorem & productum divide bifariam :
venietque Summa.

$$\begin{array}{r} 8 \\ 9 \\ \hline 72 \\ \hline 36. \text{ Summa.} \end{array}$$

Cum Numerus terminorum est impar . servire potest
hæc

Regula.

Terminus medius ducatur in numerum terminorum,
& obtinebitur Summa. Sit progressu. 1. 2. 3. 4. 5.
6 7.

$$\begin{array}{r} \text{Medius} \quad 4 \\ \text{Num. term.} \quad 7 \\ \hline 28 \text{ Su} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 4 \\ 7 \\ \hline 28 \end{array}} \right\} M$$

Hinc patet in progressione
naturali imparium numero
terminorum medium tan-
tum debere multiplicari per
maximum.

In Progressione naturali imparium 1. 3. 5. 7. 9. note-
tur hæc

Regula.

Numerum terminorum per se ipsum multiplica & ha-
bebis Summam.

$$\begin{array}{r} \text{Numerus terminorum} \quad 5 \\ 5 \\ \hline 25 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 5 \\ 5 \\ \hline 25 \end{array}} \right\} M$$

25 Summa quaesita.

De Progressione Arithmetica. 369

In progressione Naturali numerorum parium, usu venit
hæc *Regula*

$$\begin{array}{rcl}
 2. & 4. & 6. & 8. & 10. & 5 \text{ Numerus terminorum} \\
 & & & & & 6 \text{ Numerus term. } + 1 \\
 \hline
 & & & & & 30.
 \end{array}$$

Numerum terminorum multiplica per se ipsum unitate auctum: ut in hac progressione. 5 per 5 + 1 hoc est 5 per 6, ut fiat Summa 30.

Problema II.

Datis termino Minimo & Maximo, & differentia invenire Numerum terminorum & Summam.

Membri I. Regula.

A maximo termino subtrahatur minimus & reliquum dividatur per differentiam. Quotiens unitate auctus dabit Numerum terminorum. I. 3. 5. 7. 9. 11.

$$\begin{array}{rcl}
 11 & \text{Term. max.} & \\
 1 & \text{minimus.} & \left. \vphantom{\begin{array}{l} 11 \\ 1 \end{array}} \right\} S \\
 \hline
 10 & \text{Resid.} & \\
 2 & \text{Differ.} & \left. \vphantom{\begin{array}{l} 10 \\ 2 \end{array}} \right\} D \\
 \hline
 5 & & \\
 1 & & \left. \vphantom{\begin{array}{l} 5 \\ 1 \end{array}} \right\} A \\
 \hline
 6 & \text{Numerus terminorum.} &
 \end{array}$$

Membri II. Regula.

Invento Numero terminorum hæc est eadem cum Regula membri primi Probl. I.

A a

Alia

Alia Regula pro membro secundo.

A Quadrato maximi termini subtrahe quadratum minimi, Residuum divide per differentiam; quotienti adde aggregatum terminorum maximi & minimi; denique istam summam divide bifariam, & habebis summam progressionis.

Quadratum maximi	121	} S
Quadratum minimi	1	
	<hr/>	
Residuum	120	} D
Differentia	2	
	<hr/>	
Quotiens	60	} A
Aggregatum Extremorum	12	
	<hr/>	
	72	} D
	2	
	<hr/>	
Summa Progressionis.	36	

Problema III.

Datis termino Minimo & Maximo, ut & Summa: invenire Numerum Terminorum & Differentiam.

Membri I. Regula.

Duplum Summæ dividatur per aggregatum Extremorum, & quotientis indicabit Numerum terminorum.

1 Term. Min.	} A	72 Summa	} D
11 Max.		12 Aggr. Extr.	
<hr/>		<hr/>	
12 Aggr. Extr.		6 Nunc terminorum	

Mem-

Membri II Regula.

Quadratum termini minimi subtrahe à Quadrato maximi, & residuum divide per duplum Summæ & multatum aggregato Extremorum. Quotiens exhibebit differentiam Quæsitam;

Terminus Max.	11	Quadr. 121	} S
Min.	1	Quadr. 1	
S { Aggreg. ex { Duplum Summæ	12	Resid. 120	} D
	72	60	
	60		

2. Differ. quæsitæ.

Problema IV.

Datis termino Minimo, Numero terminorum, & Differentia; invenire terminum maximum & Summam,

Membri I Regula.

Differentiam Multiplica per Numerum terminorum unitate multatum & productum adde termino minimo; Aggregatum dabit Maximum terminum.

2 Differentia	} M
5 Num. term. — 1	
10 Prud.	} A
11 Maximus	
11 Max. quæsitus.	

Membri II. Regula.

Invento maximo, utere Regula Membri primi Probl.I.

Secundi membri solutioni inservit etiam hæc

Regula.

Differentiam multiplica per numerum terminorum unitate multatum; producto adde duplum minimi; quam summam si multiplices per numerum terminorum; tum producti semissis erit Summa progressionis.

Differentia	2	} M
Numerus terminor. — 1	5	
<hr/>		
Productum	10	} A
Duplum minimi	2	
<hr/>		
Summa	12.	} M
Numerus terminorum	6	
<hr/>		
Productum	72	} D
	2	
<hr/>		
Summa quæsitæ.	36	

Problema V.

Datis termino Minimo, Numero terminorum & Summa invenire terminum maximum & differentiam.

Membri I. Regula.

Duplum summæ divide per Numerum terminorum, & a quo-

quotiente ſubtrahe terminum minimum. Reſiduum dabit Maximum quaſitum.

72. Dupl. Summæ. }
6. Numerus term: } D.

12 Quot: }
1 Minimus } S.
11 Maximus quaſitus.

Membri II Regula.

Invento maximo, vide Membri I Regulam Probl: I.

Vel pro membro II notetur ſequens.

Regula.

Duplum Summæ divide per numerum terminorum & a quotiente ſubtrahe duplum miniimi termini reliquum ſi divides per numerum terminorum unitate multatum habebis differentiam quaſitam.

Duplum Summæ 72. }
Numerus Terminorum 6 } D.
Quotiens 12 }
Duplum miniimi 2 } S.
Reſiduum 10 }
Num. terminorum--1. 5 } D.
Differentia quaſita. 2.

Problema VI.

Datis termino Minimo, Differentia communi, & Progressionis Summa invenire Numerum terminorum & Terminum maximum.

Membrum. I.

Duo hic obtinent Casus.

Aut enim duplum minimi termini differentia majus est aut minus.

Casus Primi Regula.

- I A duplo minimi aufer differentiam, & residuum divide per eandem Differentiam.
- II Quadratum ex semisse quotientis adde duplo Summæ diviso per differentiam.
- III Ab hujus aggregati Radice Quadrata, aufer supra dictam quotientis semissem, Et habebitur Numerus terminorum quæsitus.

Casus II Regula.

- I Duplum minimi subtrahe à differentia, & residuum divide per eandem differentiam,
- II Quadratum a semisse quotientis adde duplo Summæ diviso per differentiam.
- III Hujus aggregati Radici Quadratæ si addatur semissis dicta quotientis, obtinebitur Numerus terminorum.

$$\begin{array}{rcl}
 2 \text{ Duplum Minimi.} & \} \text{S.} & \text{Duplum : Summæ 73.} \\
 2 \text{ Differentia.} & & \text{Diff: } \underline{\quad 2 \quad} \\
 \hline
 & & \quad \quad \quad 36. \\
 & & \quad \quad \quad \} \text{D.} \\
 0 \text{ Refid:} & \} & \\
 2 \text{ Diff:} & \} & \\
 \hline
 0 \text{ Quot:} & & \\
 \hline
 0 \text{ Semiss: Quot:} & & \\
 \hline
 0 \text{ Quadra : Semis:} & & \\
 36 \text{ Dupl : Sum : per diff: divisæ} & \} \text{A} & \\
 \hline
 36 \text{ Aggregatum.} & & \\
 \hline
 6 \text{ Radix aggr:} & \} \text{S} & \\
 0 \text{ Semissis quotientis} & \} & \\
 \hline
 6 \text{ Numerus terminox quæsitus.} & &
 \end{array}$$

Scholium.

Cum in hac nostra Progressione duplum minimi termini sit cole differentia; atque adeo perinde sit quonam Casu utamur ad solvendum Problema; ut singulorum Casuum particularia afferamus Exempla, notetur

Pro Casu I. Progressio. 4. 5. 6. 7. 8. 9;

Summa 39.

Dupl : Summæ 78.

8 Duplum Minimi

1 Differentia

7 Resid:

1 Diff:

7 Quotiens.

$$\frac{7}{2} \text{ Semif: quot:}$$

$$\frac{49}{4} \text{ Quadr: Semif: quot:}$$

Dupl. Sum.

Diff.

$$\begin{matrix} 78 \\ 1 \end{matrix} \} D$$
Dup. Sum. p diff. div. 78. $\infty \frac{312}{4}$

$$\begin{matrix} \frac{312}{4} \\ \frac{49}{4} \end{matrix} \} A$$

$$\frac{49}{4} \square \frac{1}{2} \text{ quot.}$$

Aggregatum.

$$\frac{361}{4}$$

Rad. Aggreg.

$$\frac{19}{2} \} S$$

Semif. Quot.

$$\frac{7}{2}$$

$$\frac{12}{2} \infty 6$$

Numerus terminorum.

Pro Cafu 11.

Progreffio 1 5. 9. 13. 17. 21.

Cujus Summa ∞ 66.

Duplum Summæ ∞ 132.

Differenria	4	}S
Duplum Minimi	2	
<hr/>		
Refiduum	2	}D
Differentia	4	
<hr/>		

Quotiens.	$\frac{1}{2}$
	<hr/>

Semif. Quot.	$\frac{1}{4}$
	<hr/>

Quadr. Sem. Quot.	$\frac{1}{16}$
-------------------	----------------

Dupl. Summæ	132	}D
Differentia	4	

Dupl Sum. div. p diff.	33 ∞ $\frac{528}{16}$	}A
Quadr. Semiff. Quo:	$\frac{1}{16}$	

Aggregatum,	$\frac{529}{16}$
	<hr/>

Radix Aggregati	23	}A
	4	
Semiffis Quot.	1	
	4	
	<hr/>	

	$\frac{24}{4} \infty 6.$
	<hr/>

Num. terminorum.

Mem.

Membri II Regula.

Hæc est eadem cum Membri I Regulâ Probl. IV. quando Numerus terminorum est inventus.

Ut autem absque præcedentium ope inveniatur Terminus maximus sequens notetur.

Regula.

- I. Minimum terminum subtrahe à semissi differentiæ vel si conditio progressionis aliter ferat, semissim differentiæ subtrahe à minimo termino.
- II. Residui quadrato adde duplam summam per differentiam multiplicatam.
- III Ab istius summæ radice subtrahe semissim differentiæ, & obtinebis maximum terminum quæsitum.

Semissis Differentiæ

Minimus Terminus

Residuum

Quadratum

Duplum Summæ per differentiam multiplicatur

Summa

Radix

Semissis differentiæ

Maximus Terminus.

1	1	} S
1	1	
0	0	} A
0	0	
144	144	} A
144	144	
12	12	} S
1	1	
11	11	

Aliud Exemplum.

1.	5.	9.	13.	17.	21.	
Summa	66			Semiffis differentiar.	2	} S
Duplum	132			Minimus terminus	1	
				Residuum	1	
				Quadratum	1	} A
				Duplum Summæ per diff. mult.	528	
				Summa	529	
				Radix	23	} S
				Semiffis differentiar	2	
				Maximus terminus quæsitus	24	

Aliud Exemplum.

4.	5.	6.	7.	8.	9.	
Summa	39			Minimus terminus	4	} S
Duplum	78			Semiffis differentiar	1	
					2	
				Residuum	7	
					2	
				Quadratum	49	} A
					4	
				Dupl. Summæ per differentiam	312	} A
					14	
				Summa	361	
					4	
						Ra-

Radix

Semissis differentiae

Maximus terminus.

$$\begin{array}{r}
 \frac{19}{2} \left. \vphantom{\frac{19}{2}} \right\} S \\
 \frac{1}{2} \left. \vphantom{\frac{1}{2}} \right\} S \\
 \hline
 18 \frac{1}{2} f. 9
 \end{array}$$

Jam sequitur

P R O B L E M A V I I.

Datis termino Maximo, Numero Terminorum, & Differentia; invenire terminum minimum & Summam.

Membri I. Regula.

Multiplica differentiam per Numerum terminorum unitate multatum, & productum subtrahe a termino maximo: Venietque Minimus.

$$M \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ Differentia.} \\ 5 \text{ Numerus terminorum} \end{array} \right. - 1$$

$$\begin{array}{r}
 S \left\{ \begin{array}{l} 10. \text{ Prod:} \\ 11 \text{ Maximus} \end{array} \right. \\
 \hline
 1 \text{ Minimus quaesitus.}
 \end{array}$$

Membri II. Regula.

Invento termino Minimo utere Membri I Regula
 Probl. I.
 Vel uti licet hac

Regula.

A duplo termini maximi subtrahe differentiam multiplicatam per numerum terminorum — 1: Residuum ductum in numerum terminorum dabit duplum Summæ quæsitæ.

Duplum maximi	22	} S.
Differentia per Numerum terminorum — 1	10	
Residuum	12	} M
Numerus terminorum	6	
Productum.	72.	} D
	2	
Summæ quæsitæ	36	

P R O B L E M A V I I I.

Datis Termino Maximo , Numero terminorum & Summa : invenire terminum Minimum & differentiam.

Membri I Regula

Duplum Summæ divide per Numerum terminorum, à quotiente subtrahe terminum Maximum, & habebis Minimum.

72 Dupla Summa	}
6 Numerns Terminorum	
12 Quotiens	} S
11 Maximus	
1 Minimus.	

Mem-

Membri II Regula.

Sequere Membri II. Regulam Probl. I. sc. invento termino Minimo.

Vfu etiam venit talis

Regula.

A duplo termini maximi, aufer duplum Summæ divisum per numerum terminorum: Residuum si divides per numerum terminorum unitate multatum, habebis differentiam quæsitam.

Duplum maximi	22	}	S
Dupl. Summæ divisum per numerum terminorum	11		
Residuum		10	}
Numerus terminorum—1		5	
Differentia quæsitam.		2	

P R O B L E M A IX.

Datis Termino Maximo, Differentia Terminorum & Progreffionis Summa, invenire Minimum & Numerum Terminorum.

Membri I Regula.

Dimidiam differentiam adde Termino Maximo, & hujus aggregati □to deme productum quod oritur ex dupla Summa in differentiam (vel ex Summa in duplam differentiam.)

De Progressione Arithmetica. 383

rentiam). Hujusque Residui Radicem Quadratam adde vel deme dimidia differentia: & habebis terminum minimum.

$$A \left\{ \begin{array}{ll} 1 \text{ Dimid: Differ.} & \text{Summa} \dots \dots 36 \\ 11 \text{ Termin: maxim:} & \text{Dupla diff.} \quad 4 \end{array} \right\} M$$

12 Aggregatum.

144

$$S \left\{ \begin{array}{l} 144 \text{ Quadrat. Aggregati} \\ 144 \text{ Prod. ex Summa in duplam diff.} \end{array} \right.$$

0 Residuum

$$A \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ Radix.} \\ 1 \text{ Dimidia diff.} \end{array} \right.$$

$$A \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ Radix} \\ 1 \text{ Dimidia diff.} \end{array} \right.$$

1 Terminus minimus.

Cum finis hujus Regulæ dubios nos relinquat utrum ista Radix sit addenda vel subtrahenda dimidia differentia; istas operationes sic distinguere licet. Addenda est Radix. quando minimus Terminus est major dimidia differentia.

Demenda vero si contra Minimus sit minor dimidia differentia.

Sed in hac nostra Progressione.

Term. min. 1. est ∞ dimidia differentia ∞ 1.

Adeoque siue addas siue demas Radicem: quia Numerus cui debet addi aut demi est ∞ 0, semper venit idem terminus minimus ∞ 1.

Pro

Pro Cafe I.

Posuimus Progressio 4.5.6.7.8.9.

$$\begin{array}{r} \text{Dim. diff.} \quad \frac{1}{2} \\ \text{Term. max.} \quad 9 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} \frac{1}{2} \\ 9 \end{array}} \right\} A$$

$$\text{Aggreg.} \quad 9 \frac{1}{2} \left[\frac{19}{2} \right]$$

$$\text{L. Aggregati} \quad \underline{364}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 312 \\ 4 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 4 \\ 312 \\ 4 \end{array}} \right\} S$$

$$\begin{array}{r} \text{Residuum} \\ 49 \\ 4 \end{array}$$

$$\text{Radix Q. Residui} \quad \underline{7}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 1 \\ 2 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 2 \\ 1 \\ 2 \end{array}} \right\} A$$

$$\text{Termin. minus quatuor} \quad \frac{8}{2} \propto 4.$$

Summa 39. Min.

Term. 4 major

$$\text{quoniam } \frac{1}{2} \text{ sc. dim.}$$

diff.

$$\begin{array}{r} \text{Summa 39} \\ \text{dupl. diff. } 2 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 39 \\ 2 \end{array}} \right\} M$$

$$\text{Prod. } 78 \propto \frac{312}{4}$$

Pro Casu II.

Notetur Progressio 1. 4. 7. 10. 13. 16.		Summa 51	
Ter. Max.	16. ∞	$\frac{32}{2}$	} A
Dim. diff.		$\frac{3}{2}$	
		$\frac{3}{2}$	
		$\frac{3}{2}$	
Aggregat.		$\frac{35}{2}$	
□ Aggreg.		$\frac{1225}{4}$	} S
Prod.		$\frac{1224}{4}$	
		$\frac{1}{4}$	
		$\frac{1}{4}$	
Resid.		$\frac{1}{4}$	} S
		$\frac{1}{4}$	
		$\frac{1}{4}$	
		$\frac{1}{4}$	
Radix Resid.		$\frac{1}{2}$	
		$\frac{1}{2}$	
		$\frac{1}{2}$	
		$\frac{1}{2}$	

Minimus term. quæsitus.

Membri II Regula.

Invento termino Minimo, hic servit I Regula.
Probl. VI.

Membro II Probl. IX. inservire etiam poterit hæc

Regula

Maximo termino adde semissim differentiar & summam
per differentiam divide.

Bb

Deinde

Pro Casu I.

Ponatur Progressio 4.5.6.7.8.9.

Dim. diff. $\frac{1}{2}$ } A
 Term. max. 9 }

Summa 39. Min.

Term. 4 major

quam $\frac{1}{2}$ sc. dim.

differ.

Summa 39 } M
 dupl. diff. 2 }Prod. $78 \propto \frac{312}{4}$

Aggreg. $9 \frac{1}{2} \frac{f. 19}{2}$

□ Aggregati 361 }
 4 } S
 Productum. 312 }
 4 }

Residuum 49
 4

Radix. Q. Residui 7 }

Dim. differentia. 2 } A
 1 }
 2 }

Termin. minus quæsitus $\frac{8}{2} \propto 4$.

Pro Casu II.

Notetur Progressio 1. 4. 7. 10. 13. 16.		Summa 51		
Ter. Max.	16. ∞	$\frac{32}{2}$	} A	
Dim. diff.		$\frac{2}{3}$		
		$\frac{2}{2}$		
Aggregat.		$\frac{35}{2}$		
□ Aggreg.		$\frac{1225}{4}$	} S	
		$\frac{1224}{4}$		
		$\frac{1}{4}$		
Prod.				
Refid.				
Radix Refid.		$\frac{1}{2}$	} S	
		$\frac{2}{2} \infty 1.$		
		$\frac{2}{2}$		
Minimus term. quæsitus.				

Membri II Regula.

Invento termino Minimo, hic servit I Regula.
Probl. VI.

Membro II Probl. IX. inservire etiam poterit hæc

Regula

Maximo termino adde semissim differentiar & summam
per differentiam divide.

B b

Deinde

Deinde a quotientis quadrato subtrahæ duplum summæ per differentiam divisum; & ex Residuo extrahe radicem quadratam.

Tum si semissis differentiæ sit major minimo termino hanc radicem adde quotienti primo, & summa dabit numerum terminorum.

Si vero semissis differentiæ sit minor termino minimo hanc radicem quotienti primo deme, & Residuum prodet numerum terminorum.

Maximus terminus

11 }
1 } A.

Semissis differentiæ

Summa

12 }
2 } D.

Differentia

Quotiens

6

Quadratum

36

Duplum Summæ per differentiam
divisum.

36

} S

A vel S

Residuum.

0

Radix.

0

Summa & Residuum

6.

erit Numerus Terminorum.

Aliud Exemplum pro Casu I.

1. 4. 7. 10. 13. 16. Summa 51.
Duplum 102.

Maximus terminus. 16. f. $\frac{32}{2}$
Semifis differentia $\frac{3}{2}$ } A

Summa $\frac{35}{3}$
Differentia $\frac{3}{3}$ } D

Quotiens $\frac{35}{6}$

Quadratum $\frac{1225}{36}$

Duplum summae progressionis per differentiam divisum 34 f. $\frac{1224}{36}$ } S

Residuum $\frac{1}{36}$

Radix $\frac{1}{6}$

Summa erit Numerus terminorum quæsitus $\frac{36}{6}$ f. 6

Aliud Exemplum pro Casu II.

4.	5.	6.	7.	8.	9.	Summa	39	
						Duplum	78	
						Maximus terminis	9. f.	$\frac{18}{2}$
								$\frac{1}{2}$
						Semiffis differentia		$\frac{1}{2}$
								$\frac{1}{2}$
						Summa		$\frac{19}{2}$
								$\frac{1}{2}$
						Differentia		$\frac{1}{2}$
						Quotiens		$\frac{19}{2}$
								$\frac{1}{2}$
						Quadratum		$\frac{361}{4}$
								$\frac{1}{4}$
						Duplum summæ progressionis per differentiam divisum	78. f.	$\frac{312}{4}$
								$\frac{1}{4}$
						Residuum		$\frac{49}{4}$
								$\frac{1}{4}$
						Radix		$\frac{7}{2}$
								$\frac{12}{2}$
						Residuum erit Numerus termi- norum quæsitus.		f. 6.

P R O B L E M A X.

Dato Numero Terminorum, Communi differentia,
& Progressionis Summa, invenire Terminum maximum
& Minimum.

Membri I. Regula.

Divide Summam per Numerum Terminorum, Quotien-
ti adde productum ex dimidia differentia in Numerum ter-
minorum (seu ex differentia in dimidium Numerum ter-
minorum). Ab hoc aggregato si demas dimidiam diffe-
rentiam habebis Terminum Maximum.

Summa	36.	}D	Numerus Term:	6.	}M.
Num : Term :	6		Dimid : Diff:	1.	
Quotiens	6.	}A.	Prod:	6.	
Productum	6				
Aggregatum	12.	}S			
Dimid: diff:	1.				
Term: Max :	11.		Quæsitus.		

Membri II. Regula.

Divide Summam per Numerum Terminorum, Quo-
tienti adde dimidiam differentiam: Et ab hoc aggregato
subtrahe productum ex dimidia differentia in Numerum
Terminorum (seu ex dimidio Numero Terminorum in dif-
ferentiam). Residuum dabit Minimum.

Summa	36.	} D	Aggreg.	7	} s	
Numerus Term.	6.		Prod:	6		
Quot:	6.	} A	Term: Min: 1. Quæsitus			
Dimid. diff.	1.					
Aggreg.	7.					

*Exempla Quæstionum ad Arithmetice Progressionis
Problemata præcedentia pertinentium.*

E X E M P L U M I.

Octo cursoribus proponuntur præmia ita ut qui ultimus metam attigerit accipiat 4 florenos. Penultimus 7. Antepenultimus 10. & sic consequenter progressionem cum differentia 3 ascendendo. Quæritur quantum ei debeatur, qui primus ad metam venerit. Item quot floreni omnibus cursoribus simul sint distribuendi.

Membram I.

Hic Progressionis Arithmetice datus est Terminus Minimus. 4. Differentia 3. & Numerus Terminorum 8. quæriturque Maximus; Adeoque opus hic est Membro I Problemæ IV. cuius Regulam hoc modo sequimur.

$$M. \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ Differentia.} \\ 7 \text{ Numerus Term: } \text{---} 1 \end{array} \right.$$

$$A \left\{ \begin{array}{l} 21 \text{ Prod:} \\ 4 \text{ Terminus minimus.} \end{array} \right.$$

25. Term: Maximus indicans florenos qui debent dari primo attingenti metam.

Mem-

Membrum II.

Hoc idem est ac si datis termino Minimo & Maximo; ut & Numero terminorum, quærat^r Progressionis Summa: quare Membrum I Probl: I hic applicamus.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Term: Minimus } 4. & & \\
 \text{Maximus } 25 & \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Term: Minimus } 4. \\ \text{Maximus } 25 \end{array}} \right\} A \\
 \hline
 \text{Aggregatum } 29 & & \\
 \text{Semiss. Num. term. } 4. & \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Aggregatum } 29 \\ \text{Semiss. Num. term. } 4. \end{array}} \right\} M. \\
 \hline
 \text{Summa } 116 \text{ floreni omnibus distribuendū}
 \end{array}$$

E X E M P L U M I I.

Est Acies quædam disposita in Formam Triangularem, cujus primus seu Minimus ordo capit 4 milites. Ultimus seu maximus 130. Si jam sint, 64 ordines, quæritur numerus militum Totius Aciei. ut & Numerus quo singuli ordines se invicem excedant.

Hic datus est Progressionis Arithmeticæ Terminus minimus 4. Maximus 130. Numerus Terminorum 64. Quare utendum erit Probl: I.

Membrum I.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Minimus } 4. & & \\
 \text{Maximus } 130 & \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Minimus } 4. \\ \text{Maximus } 130 \end{array}} \right\} A \\
 \hline
 \text{Aggreg. } 134 & & \\
 \text{Sem. Num. Term. } 32 & \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Aggreg. } 134 \\ \text{Sem. Num. Term. } 32 \end{array}} \right\} M \\
 \hline
 & 268 & \\
 & \underline{402} & \\
 \text{Numerus } & 4288: & \\
 \text{militum quæsitus.} & &
 \end{array}$$

Membrum II.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Maximus } 130. & & \\
 \text{Minimus } 4. & \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Maximus } 130. \\ \text{Minimus } 4. \end{array}} \right\} S \\
 \hline
 \text{Residuum. } 126 & & \\
 \text{Num. Term. } 1. 63 & \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Residuum. } 126 \\ \text{Num. Term. } 1. 63 \end{array}} \right\} D \\
 \hline
 \text{Quotiens } - 2 \text{ Communis} & & \\
 \text{Differentia: quo numero} & & \\
 \text{singuli ordines a se invicem} & & \\
 \text{differunt.} & &
 \end{array}$$

E X E M P L U M III.

Mercator vendit aliquot uniones primum 4 Denariis secundum 10, & sic porro ascendendo per 6. usque ad ultimum quem vendit 478 denariis. Quæritur quot fuerint Uniones & quot denarios Mercator debeat accipere.

In hoc quæstione datus est Terminus minimus. Maximus & Differentia,

Unde patet illius Solutioni inservire debere Probl : II.

Membrum I.

Maximus	478.	} S
Minimus	4	
<hr/>		
Residuum	474.	} D.
differentia	6	
<hr/>		
Quotiens	79.	} A
	1	

Num. Unionum 80.

quæritus

Membrum II.

Maximus	478.	} A
Minimus	40	
<hr/>		
Aggregatum	482	} M
Sem. Num : Union.	40	
<hr/>		
Summa denari-	19280	
orum quos merca-		
tor debet recipere.		

E X E M P L U M IV.

Quidam vult fodere puteum, & cum operario contrahum init, ut pro prima pertica ipsi solvat 25 solidos, pro secunda 40. pro tertia 55. & sic porro pro sequente 15 solidos plus quam pro præcedente, usque ad 12 perticas. Quæritur quanti constabit iste puteus.

Datus

Datus est Minimus. Differentia & Numerus Terminorum quare per Probl. IV & I facile solvitur quæstio.

Quæzatur per Probl: IV.		Iam per Probl: I invenitur	
Term: Maximus.		Summa.	
M	{ 15 Differentia.	Maximus	190. } A
	{ 11 Num: Term: -- 1	Minimus	25. } A
<hr/>		<hr/>	
A	15	Aggregatum	215 } M
	15	Sem. Num. Term. 6	} M
	<hr/>	S. Perticarum	
	{ 165. Productum	Summa Solidorum	1290.
	{ 25 Minimus	quibus constabit Puteus	
	<hr/>	<hr/>	
190. Maximus			

C A P V T I I.

De Progressione Geometrica.

Progressio Geometrica est series Numerorum, qui se invicem in eadem Ratione sequuntur.

Ita sc: ut Primus Terminus toties contineat Secundum vel in illo contineatur: quoties hic continet tertium vel in illo contineatur: Et Secundus toties contineat Tertium vel in illo contineatur quoties hic continet quantum vel in illo continetur. Et sic porro.

In Progressione Geometrica sunt series sequentes.

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. Ubi est ratio dupla adeoque
2 est denominator Rationis.
1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. Ubi est ratio tripla, unde est
Numerus 3 denominator Ra-
tionis.

1. 4. 16. 64. 256. 1024. 4096. Ubi ratio est qua-
drupla adeoque 4
erit denominator.

Et sic ulterius in infinitum assumendo quemlibet Nume-
rum pro Denominatore Rationis.

Theorema I.

In Progressione Geometrica trium Terminorum Pro-
ductum Extremorum est \propto Quadrato Medii.

2.	4.	8.		3.	9.	27.		2	12	72.
.	<u>4</u>	.		.	<u>9</u>	.		.	<u>12</u>	.
.	16	.		.	81	.		.	144.	.
.	16	.		.	81	.		.	144.	.

Theorema II.

In Progressione Geometrica quatuor Terminorum
Productum Extremorum est \propto Producto medierum.

1.	2.	4.	8.		1	3.	9	27.		3.	6.	12	24
.	.	8	.		.	.	27.	.		.	.	72.	.
.	.	8	.		.	.	27	.		.	.	72	.

In omni Progressione Geometrica, cujus Numerus Terminorum est par, Productum Extremorum est æquale producto quorumlibet terminorum ab Extremis æqualiter distantium.

2	4	8	16	32	64	3	6	12	24	48	96
.
.	.	..128..	:	...288...	.	.	.
.
.	128	288	.	.	.
.
.....	128	288	.	.	.

Hiscæ præmissis Theorematibus quæ principales Geometricæ Progressionis exhibent Proprietates. sequuntur Problemata circa istam Progressionem Geometricam ut plurimum afferri solita.

Hic autem considerabimus, ut in præcedentibus quoque fuit notatum in Arithmetica Progressione, quinque hæc diversa: qualia sunt

I. Terminus Primus, qui erit Minimus.

II. Terminus ultimus qui erit Maximus.

III. Numerus Terminorum.

IV. Communis Ratio.

V. Summa Progressionis.

Ex quibus 5 Rebus diversis cum crui. possint Terniones 10 totidem etiam proponemus Problemata.

Problema I.

Datis Terminis Minimo & Maximo, cum Numero Terminorum invenire Communem Rationem & Summam.

Mem-

Membri I. Regula.

Terminum Ultimum divide per primum, & ex Quotiente extrahe Radicem Numero terminorum unitate multato cognominem. & habebis Communem Rationem.

Hoc est si fuerint 5 termini erit 5 — 1 ∞ 4. Adeoque ex Quotiente extrahenda erit $\sqrt[4]{}$. seu Radix Quadrato Quadrata.

Si fuerint 7 Terminum erit 7 — 1 ∞ 6. Quare ex quotiente erui debet $\sqrt[6]{}$ seu Radix Quadrato Cubica. & sic porro.

Ponatur hæc Progressio 5 terminorum 2. 4. 8. 16. 32. Summa est 62.

$$\begin{array}{r} D \left\{ \begin{array}{l} 32 \text{ Ultimus.} \\ 2 \text{ Primus.} \end{array} \right. \end{array}$$

$$16 \text{ Quotiens } \sqrt[4]{}$$

2 Communis Ratio Quæsitæ.

Membri II. Regula.

Ultimum terminum multiplica per rationem inventam à Producto subtrahe terminum primum: & Residuum divide per Rationem unitate multatam, & veniet tibi Summa.

$$\begin{array}{r}
 M. \left\{ \begin{array}{l} 32 \text{ Ultimus.} \\ 2 \text{ Ratio.} \end{array} \right. \\
 \hline
 S \left\{ \begin{array}{l} 64. \text{ Productum.} \\ 2 \text{ Primus} \end{array} \right. \\
 \hline
 D \left\{ \begin{array}{l} 62. \text{ Residuum.} \\ 1 \text{ Ratio --- 1} \end{array} \right. \\
 \hline
 62. \text{ Summa quaesita.}
 \end{array}$$

Problema II.

Datis Terminis Minimo & maximo, & Communi Ratione invenire Numerum Terminorum & Summam.

Membris I. Regula.

Maximum divide per minimum : & inquire quanta potestas quotiens sit Communis Rationis : tum Numero potestati cognominis adde unitatem & habebis Numerum Terminorum.

$$D \left\{ \begin{array}{l} 32 \text{ Maximus.} \\ 2 \text{ Minimus.} \end{array} \right.$$

16. Quotiens. qui est Potestas quarta (hoc est Q Q)
Rationis. 2. Ergo.

$$A \left\{ \begin{array}{l} 4 \text{ Numerus Potestati cognomen} \\ 1 \end{array} \right.$$

5 Numerus terminorum quaesitus.

Mem-

Membri II. Regula.

Hæc est eadem cum Memb. I Regula Probl. I. quam vide.

Vel paulo aliter eadem summa hoc modo potest inveniri.

Terminus minimus subtrahatur a Maximo: Et Residuum divide per Communem Rationem unitate minutam. Quotienti adde Ultimum & habebis summam quaesitam.

$S \begin{cases} 32. \text{ Maximus} \\ 2 \text{ Minimus} \end{cases}$	<p>N. B.</p>
$D \begin{cases} 30. \text{ Residuum.} \\ 1 \text{ Communis Ratio.} \end{cases}$	<p>Hæc Regula demonstrat omnes particulares Regulas quas habet Tacquetus Probl. 6. pag. 359.</p>
$A \begin{cases} 30 \text{ Quotiens.} \\ 32 \text{ Maximus} \end{cases}$ <p>62. Summa quaesita.</p>	

P R O B L E M A III.

Datis Termino Minimo, Maximo, & Progressionis Summa invenire Communem Rationem & Numeram Terminorum.

Membri I Regula.

Summam minimo Termino minutam divide per eandem Summam multatam maximo Termino.

$$\begin{array}{rcl}
 S \left\{ \begin{array}{l} 62. \text{ Summa.} \\ 2 \text{ Minimos} \end{array} \right. & S \left\{ \begin{array}{l} 62 \text{ Summa} \\ 32 \text{ Maximus} \end{array} \right. & \\
 \hline
 D \left\{ \begin{array}{l} 60. \text{ Summa} - \text{Minimo.} \\ 30 \text{ Summa} - \text{Maximo} \end{array} \right. & 30. \text{ Summa} - \text{Max.} & \\
 \hline
 2 \text{ Communis Ratio quæsitâ.} & &
 \end{array}$$

Membri II Regula.

Inventa Communi Ratione, adhibe Membri I Regulam Problematis II.

Vel juxta hanc Regulam.

Maximi & minimi differentiam divide per Summam maximo multiplicatam, & quotienti adde unitatem habebisque Communem Rationem.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Maximus} & 32 & \left. \vphantom{\begin{array}{c} 32 \\ 2 \end{array}} \right\} S \\
 \text{Minimus} & 2 & \\
 \hline
 \text{Differentia} & 30 & \left. \vphantom{\begin{array}{c} 30 \\ 30 \end{array}} \right\} D \\
 \text{Summa} - \text{Max.} & 30 & \\
 \hline
 \text{Quotiens} & 1 & \left. \vphantom{\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}} \right\} A \\
 & 1 & \\
 \hline
 \text{Ratio quæsitâ.} & 2 &
 \end{array}$$

P R O B L E M A I V.

Datis Termino Minimo, Numero Terminorum & Communi Ratione. invenire Terminum Ultimum & Progressionis Summam.

Mem-

Membri I. Regula.

Elevetur Communis Ratio ad potestatem cognominem Numero terminorum unitate multiplicato. Tum per hanc potestatem Rationis multiplica Terminum Minimum & habebis Maximum.

2 Communis Ratio.

$$\begin{array}{r}
 \hline
 M \left\{ \begin{array}{l} 16 \text{ Potestas quarta. quia Numerus terminorum} \\ \quad 5 - 1 \propto 4 \\ 2 \text{ Minimus} \end{array} \right. \\
 \hline
 32 \text{ Ultimus quæsitus.}
 \end{array}$$

Membri II Regula.

Invento termino Ultimo inveniendæ Summæ applicabitur Membri II. Regula Probl. I.

Præblema V.

Datis Termino Minimo, Numero Terminorum, & Summa, Invenire Communem Rationem & Terminum Maximum.

Membri I. Regula.

Multiplica Summam per aliquem Numerum conjecturando positum, (qui dicatur R.) A producto aufer eandem Summam minimo Terminō multiplicatam. Residuum divide per Terminum minimum. Si tum quotiens sit æqualis Potestati Numeri R Terminorum Numero cognomini: erit iste Numerus R. Ratio quæsitæ. Sin minus non erit: adeoque sumendus erit pro R alius Numerus.

C c

Ten-

Tentamen I.

Summa	62	} M
Num. R.	3	
<hr/>		
Productum	186	} S
Summa-Min.	60	
<hr/>		
Residium	126	} D
Minimus	1	
<hr/>		
	69	

Quia quia est minor potestate
5ta Numeri positi R iste Nume-
tur R non erit Ratio Commu-
nis.

Numeri R.

3	Potest. I
3	
<hr/>	
9	Pot. II
3	
<hr/>	
27	Pot. III
3	
<hr/>	
81	Pot. IV
3	
<hr/>	
243	Pot. V.

Numeri R 2
potestas V est 32

Tentamen II.

Summa	62	} M
Numerus R	2	
<hr/>		
Productum	124	} S
Summa-Minim.	60	
<hr/>		
Residuum	64	} D
Minimus	2	
<hr/>		
Quotiens	32	

Qui quia est 30 potestati 5ta positi numeri R seu
2. Erit Numerus 2 Ratio Communis.

Membri II Regula.

Inventa Communi Ratione sequi licebit Membri I
Regulam Problem. IV.

PRO-

P R O B L E M A VI.

Datis Termino Minimó, Communi Ratione & Summa, Invenire Terminum Maximum & Numerum Terminorum.

Membri I Regula.

Multiplica Summam per Rationem, a Producto Subtrahe Summam minimo terminimo minutam; Et Refiduum divide per Rationem. Et habebis Terminum Maximum quaesitum.

$$\begin{array}{r}
 M \left\{ \begin{array}{l} 62 \text{ Summa} \\ 2 \text{ Ratio} \end{array} \right. \\
 \hline
 S \left\{ \begin{array}{l} 124 \text{ Productum.} \\ 60 \text{ Summa -- minimo} \end{array} \right. \\
 \hline
 D \left\{ \begin{array}{l} 64 \text{ Refiduum.} \\ 2 \end{array} \right. \\
 \hline
 32. \text{ Maximus quaesitus.}
 \end{array}$$

Membri II Regula.

Invento Termino Maximo, utere membri I Regula, Probl: II.

P R O B L E M A V I I.

Datis Termino Maximo, Numero Terminorum & Communi Ratione invenire Minimum & Summam.

Membri. I. Regula.

Multiplicando eleva Rationem ad potestatem Numero Terminorum unitate minori cognominem, & per hanc potestatem divide Maximum: quo facto habebis Minimum.

2 Ratio	Num. Term :
16 Potestas quarta quia 5 --- 1 ∞ 4	
D { 32 Maximus	
16 Potestas quarta	
2 Terminus Minimus.	

Membri II. Regula

Invento Minimo hæc est eadem cum Membri II Reg: Probl: I.

P R O B L E M A V I I I.

Datis Termino maximo, Numero Terminorum & Summa invenire Communem Rationem & Terminum Minimum.

Mem-

Membri I. Regula.

Summam multiplica per Numeri alicujus (qui conjectura assumtus dicatur R) potestatem Numero terminorum -- 1 Cognominem ; ab hoc producto aufer Terminum Maximum : Residuum divide per eandem Summam Termino maximo multiplicatam. Tum ut in Probl : V.

Tertamen I.

Num : R.

Summa	62.	3 Pot : I.
Potestas 4ta Num. R	81	
$\infty 3$	}	
	M.	3

Productum	5022	9 Pot : II.
Term : Maximus	32	
	}	3
	S	27 Pot : III.

Residuum.	4990	3
Summa -- Max.	30	
	}	81 Pot : IV.
	D	3

Quotiens	$166 \frac{1}{3}$	3
		243 Pot : V.

Qui quia est minor potestate quinta Num:R. iste Num: R non est ratio quaesita.

Numeri R $\infty 2$ Potestas 5ta est 32

Tentamen II.

Summa	62	}
Pot : 4ta Num : R	16	
$\infty 2$	}	
	M.	

Productum	992.	}
Term : Maximus	32	
	}	S

Residuum.	960.	}
Sum : -- Max :	30	
	}	D.

Quotiens	32.
----------	-----

Qui quia est ∞ potestati $52a$ Numeri assumti $R \propto 2$.
Erit ille ∞ Rationi communi quæsitæ.

Membri II. Regula.

Inventa Communi Ratione adhibe Membri I Regulam
Problematis VII.

P R O B L E M A I X.

Datis Termino Maximo, Communi Ratione & Summa, invenire Terminum Minimum, & Numerum Terminorum.

Membri I. Regula.

Summam Termino Maximo minutam, multiplica per
Communem Rationem & Productum subtrahere a Summa;
venietque Minimus.

$$\begin{array}{r}
 M \left\{ \begin{array}{l} 30. \text{ Summa --- Maximo.} \\ 2 \text{ Ratio} \end{array} \right. \\
 \hline
 S \left\{ \begin{array}{l} 60 \text{ Productum,} \\ ex \left\{ \begin{array}{l} 62. \text{ Summa} \end{array} \right. \end{array} \right. \\
 \hline
 2 \text{ Terminus minimus.}
 \end{array}$$

Membri II. Regula.

Invento minimo termino applicare poteris Membri I
Regulam Problematis II.

P R O B L E M A X.

Datis Numero Terminorum, Communi Ratione, & Summa, invenire Terminum Minimum & Maximum.

Membrī I Regula

Multiplica Summam per Communem Rationem unitatem minutam & Productum divide per Rationis potestate Numero terminorum cognominem unitate itidem minutam; & erit Quotiens Terminus Minimus.

$$M \left\{ \begin{array}{l} 62 \text{ Summa.} \\ 1 \text{ Ratio -- 1} \end{array} \right.$$

$$D \left\{ \begin{array}{l} 62 \text{ Productum.} \\ 31. \text{ Rationes potestas quinta Numero terminorum 5 cognomen, unitate minuta} \end{array} \right.$$

2 Terminus Minimus.

Membrī II. Regula.

A Rationis potestate Numero terminorum cognomine subtrahere rationis potestatem Numero Terminorum unitate minuto cognominem; Residuum multiplica per Summam & productum divide per Rationis potestatem Numero cognominem sed unitate minutam.

$$\begin{array}{r}
 S \left\{ \begin{array}{l} 32. \text{ Rationis potestas quinta, Numero termi-} \\ \text{ norum 5 cognomen.} \\ 16 \text{ Rationem potestas quarta Numero termi-} \\ \text{ norum — 1 cognomen,} \end{array} \right. \\
 \hline
 M \left\{ \begin{array}{l} 16 \text{ Residuum.} \\ 62 \text{ Summa} \end{array} \right. \\
 \hline
 \begin{array}{r} 32 \\ 96 \end{array} \\
 \hline
 D \left\{ \begin{array}{l} 992 \text{ Productum.} \\ 31 \text{ Rationis potestas quinta Numero termi-} \\ \text{ norum 5 cognomen — 1.} \end{array} \right. \\
 \hline
 32 \text{ Terminus Maximus.}
 \end{array}$$

Scholium. I.

Cum ex præcedentibus Problematibus illa videantur esse præcipua quæ in Progressionis propositæ Summam inquirant, minime omittendum putamus illud quod sequitur.

P R O B L E M A.

Datis Termine Primo, Secundo & Ultimo, invenire summam,

Regula Ascendentis Progressionis.

Multiplica Ultimum terminum per secundum. A producto subtrahe Quadratum Primi; & Residuum divide per secundum Primo Multatum.

Sit

De Progressione Geometrica. 409

Sit Progressio Ascendens eadem quam supra posuimus
ut Subjectum Regularum sc: 2. 4. 8. 16. 32.

Term : ultimus	32.	} M.
Secundus	4.	

Productum	128	} S.
Quadratum primi	4	

Residuum	124.	} D.
Secundus — Primo	2	

Summa quæsitæ	62.
---------------	-----

Regula Progressionis descendens.

Multiplica terminum ultimum per Secundum. Productum subtraha a Quadrato primi Residuum divide per Primum minutam Secundo.

Sit progressio	Terminus ultimus	2.	} M.
	Secundus	16.	

32. 16. 8. 4. 2.	Productum.	32	} S.
	Quadr. Primi	1024	

Residuum	992	} D.
Primus - Secundo	16	

Summa quæsitæ.	62.
----------------	-----

Cum autem ad solvendum hoc Problema necessario ultimus progressionis terminus debeat esse notus; & tardium parere possit haud exiguum eundem per continuam multi-

plicationem inquirere maximo compendio ipsum hoc modo invenire licet.

64 128 259 512 1024 2048

1. 2. 4. 8. 16. 32. a b c d e f.

o I II III IV V VI VII VIII IX X XI.

Continuetur progressio per aliquot terminos, ut hic factum est ipsis subscribantur numeri naturales a o incipientes, ita ut V cadat sub 3, denotans hunc terminum 32 distare a primo 1 quinque locis.

Ut jam inveniatur, Undecimus e cui subjectus est exponens X. Multiplicetur 32 per se ipsum, & acquireretur \square rum 1024, quo diviso per primum 1. venit 1024 pro quæsito termino Unuecimo e.

Sic si velimus quærere terminum octavum b, quadratum 1024 termini 32. divide per terminum III sc: 8. qui cum b a partibus contrariis æquid istat a V 32. qui consideratur tanquam medius. & inveniatur 128. pro termino b. f. VII.

Ratio & fundamentum hujus Operationis jacet in Theoremate III & IV supra positis.

Numerorum autem subscriptorum talis est Usus.

Sint præcedentis progressionis dati priores tres termini, & sit inveniendus duodecimus.

1. 2. 4. Multiplica. 2 & 4 productum 8 divide
per primum 1. veniet quotiens 8. qui erit
o I. II. quartus terminus notandus numero III.
quia 1 + II = III.

De progressionē Geometrica. 411

1. 2. 4. 8. Deinde multiplica 8 per se ipsum
 & □tum 64 divide per primum 1.
 o I II III. habebitur quotiens 64. qui erit sep-
 timus terminus notandus numero
 VI. quia $III + III \propto VI$.

1. 4 8 . . 64.
 o I II VI.

Denique Multiplica 64 per se ipsum, & □tum 4096
 divide per primum 1. obtinetur quotiens 4096 qui erit
 13mus Terminus notandus per XII quia $VI + VI \propto XII$.

Qui terminus 4096 si jam dividatur per secundum 2 ve-
 niet quotiens 2048. Terminus duodecimus notandus Nu-
 mero XI. quia $XII - I \propto XI$.

1. 2. 4. 8. . . 64 2048
 o I II III IV V VI VII VIII IX X XI:

Cujus Compendii fructus adhuc clarius patebit in se-
 quentibus Exemplis.

E X E M P L U M I.

Equus aliquis calceis singulos infixos habeat sex clavos:
 si is vendatur ea conditione ut primus clavus solvatur uno
 denario, secundus duobus, tertius quatuor, & sic dein-
 cept in proportionē dupla ad clavum usque 24tum. Qua-
 ritur quo pretio constet iste Equus.

	1	0
	2	I
	4	II
M	8	III
	16	IV
	64	VI
M	1024	X. Adde sibi ipsi.
	1048576	XX
	16777216	XXIV.

Qui cum sit vigesimus quintus terminus, erit etiam vigesimus quartus (seu ultimus progressionis datæ) multiplicatus per rationem 2. à quo producto si auferatur primus terminus 1, remanebit 16777215: quod residuum divisum per Rationem — 1 id est per 1 dabit eundem numerum pro Summa quæsitæ denariorum quibus constabit Equus. Vide hanc operationem Membro II Probl. I.

Quod pretium Millena millia superat.

Quale incrementum à termino tam exiguo ortum, primo intuitu nullo modoprehenditur, unde merito in Republica tales fraudulentæ Emptiones prohibitz sunt.

EXEMPLVM II.

Si quis conducat servum in annum integrum ea lege ut prima septimana recipiat denarium, secunda duos, tertia

De progressionē Geometrica.

413

ria 4 & sic deinceps, singulis septimanis Mercedem duplicando; quæritur quantam mercedem accepturus est iste servus anno finito, seu septimanis 52.

Ad hoc solvendum repetatur Calculus & progressio
Exemplo primi, usque ad terminum XXIV.

	I	0	
	2	I	
	4	II	
	8	III	
	16	IV	
M.	64	VI	
	1024	X	
	1048576	XX	A
Mult. p seipsum	16777216	XXIV	Adde sibi ipsi
—	281474976710656	XLVIII	
	2251799813685248	LI.	
Qui erit progressionis terminus 52. adeoque ultimus: si jam ille multiplicetur per Rationem 2. habebitur.		juxta Membri II Regulam	
4503599627370496		Probl. I.	
		Productum	
		Terminus Minimus	}S
4503599627370495		Residuum	
		Ratio — 1	}D
4503599627370495		Summa Progressionis: ad-	
		equæ denariorum quos	
		servus in fine anni debet	
		accipere.	

EXEM-

E X E M P L U M III.

Quod omnium Exemplosum primarium est, & Progressionum potentiarum imperitorum quam maxime meretur admirationem; scilicet illud quod de Ludo Schacchorum sive Latrunculorum vulgo proponitur, cujus abacus 64 cellulis sive Quadratis distinctus est; qui si hac conditione granis frumenti debeat impleri, ut quadrato primo imponeretur 1 gravum Secundo 2 grana, Tertio 4. Quarto 8 grana, & sic ad sexagesimum quartum usque, in proportionem dupla ascendendo. Quæritur Numerus granorum quæ ad hoc deberent congeri.

	1	0
	2	I
	4	II
	8	III
Multipl. per se ipsum	16	IV Adde sibi ipsi
Multipl. per se ipsum	256	VIII Adde sibi ipsi
□	65536	XVI Adde sibi ipsi
	4294967296	XXXII Adde sibi ipsi
Multiplica in se ipsum.		—————
18446744073709551616 LXIV.		

Qui numerus erit terminus progressionis sexagesimus quintus: adeoque Productum Ultimi per Rationem multiplicati; quæ si porro (juxta Reg. Membri II. Probl. I) ab hoc producto auferamus terminum Minimum 1. & illud Residuum dividamus per Rationem — 1 hoc est per 1, veniet Summa Progressionis, adeoque & granorum quæ iste abacus requirit.

18446744073709551615, qui numerus tantus est ut enunciari vix se patiat.

Scho-

Scholium I L

Notatu autem dignissimum est inveniri posse Summam Progressionum non tantum finitarum sed etiam infinitarum, quæ ab aliquo termino extremo per intermedios descendunt usque ad nullam seu 0: quos omnes intermedios cognoscere & notare impossibile erit: Si enim ponamus Maximum $\frac{1}{2}$: & in progressione duplia descendamus, venient $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{32}$.

&c. & infiniti alii, qui omnes ulterius continuati magis ac magis diminuuntur donec tandem perveniant ad 0, quæ tum sumitur pro termino minimo.

E X E M P L U M I.

Sit progressio incipiens ab $\frac{1}{2}$ & in ratione subdupla infinitum descendens usque ad Cyfram seu Nullam 0.

Juxta Regulam.
Membri II. Probl. II.

$\frac{1}{2}$ Maximus } M
2 Ratio

1 Productum. } S
0 Minimus

1 Residuum } D
1 Ration. $\div 1$

1 Quotiens seu summa quæsitæ.

Juxta Regulam.
Membri II. Probl. II.

Maximus $\frac{1}{2}$ } S
Minimus 0

Residuum $\frac{1}{2}$ } D
Ratio -- 1 1

Quotiens $\frac{1}{2}$ } A
Maximus $\frac{1}{2}$

Summa quæsitæ 1

Juxta

Juxta Regulam Scholii præcedentis, ponendo terminum

	Primum	$\frac{1}{2}$
	Secundum	$\frac{1}{4}$
	Ultimum	0
Ultimus	9	} M
Secundus	$\frac{1}{4}$	
Productum	0	} S
Quotum Primi	$\frac{1}{4}$	
		} ex
Residuum	$\frac{1}{4}$	
Primus-Secundo	$\frac{1}{4}$	} D
Summa	1	

Corollarium.

Ex Regula media patet Maximum terminum esse æqualem Summæ omnium Reliquorum: quare hac ab illo subtracta nihil remanebit.

Adeoque $\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \quad \&c.$
in infinitum erit $\infty 0$.

Similiter $1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \&c.$
 $\infty 0$. Et sic de aliis.

EXEM-

EXEMPLUM II.

Sit Progressio incipiens ab $\frac{1}{3}$ & in ratione tripla in infinitum descendens usque ad 0.

Modus I.	
$\frac{1}{3}$ Maximus	} M
$\frac{3}{3}$ Ratio	
<hr/>	
1 Productum	} S
0 Minimus	
<hr/>	
1 Refiduum	} D
2 Ratio -- 1	
<hr/>	
$\frac{1}{2}$ Summa.	

Modus I I.		
Maximus	$\frac{1}{3}$	} S
Minimus	0	
<hr/>		
Refiduum	$\frac{1}{3}$	} D
Ratio — 1	2	
<hr/>		
Quotiens	$\frac{1}{6}$	} A
Maximus $\frac{1}{3}$ f.	$\frac{2}{6}$	
<hr/>		
Summa	$\frac{3}{6}$ f.	$\frac{1}{2}$

Modus III.

Ponendo term.	I	$\frac{1}{3}$	
	II	$\frac{1}{9}$	
Ultimum		0	
Ultimus		0	} M
Secundus		$\frac{1}{9}$	
<hr/>		<hr/>	
Productum		0	} S
Quotum Ichni		$\frac{1}{9}$	
<hr/>		<hr/>	
Residuum		$\frac{1}{9}$	} D
Primus — Secundo		$\frac{2}{9}$	
<hr/>		<hr/>	
Summa quaesita		$\frac{1}{2}$	

Corollarium.

Ex modo Secundo rursus patet primum terminum seu maximum $\frac{1}{3}$ esse duplum omnium reliquorum: quare si hi omnes per 2 multiplicetur erit

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{2}{27} - \frac{2}{81} = \frac{2}{81} - \frac{2}{243} \quad \&c.$$

in infinitum $\infty 0$.

Sic

De Progressione Geometrica. 419

Sic si progressio incipiat ab 1 & proportione tripla in infinitum descendat usque ad o invenietur Summa $\infty \frac{3}{2}$ s. $1 \frac{1}{2}$. Eritque hoc in loco, ut & in omnibus hujus generis progressionibus maximus rursus duplex omnium Reliquorum, adeoque

$$1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{9} - \frac{2}{27} - \frac{2}{81} - \frac{2}{243} \&c. \infty 0$$

Similiter inveniemus esse Progressiones

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{64} \quad \frac{1}{256} \&c. \text{ esse } \infty \frac{1}{3}$$

Proportio quadrupla.

$$\frac{1}{5} \quad \frac{1}{25} \quad \frac{1}{125} \quad \frac{1}{625} \&c. \infty \frac{1}{4} \quad \text{Pro-}$$

portio Quintupla.

Adeoque quamlibet progressionem hujus generis esse qualem fractioni, cujus denominator unitate minor est denominatore fractionis maximæ in illa serie.

Atque hæc de Progressionibus dicta sufficiant. Sequitur.

CAPVT III.

De Combinationibus.

Aliquando contingit ut incidat quæstio, quoties ex diversarum rerum numero proposito binæ ac binæ, ac ternæ ac ternæ, quaternæ ac quaternæ diversæ possint assumi: quod accurate determinare sequentibus aggrediemur

A	<table><tr><td>a</td><td>b</td></tr><tr><td colspan="2">ab</td></tr></table>	a	b	ab		1. Combinatio																					
a	b																										
ab																											
B	<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr><tr><td colspan="2">ab</td><td>ac</td></tr><tr><td colspan="2"></td><td>bc</td></tr></table>	a	b	c	ab		ac			bc	3 Combunationes																
a	b	c																									
ab		ac																									
		bc																									
C	<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td></tr><tr><td colspan="2">ab</td><td>ac</td><td>ad</td></tr><tr><td colspan="2"></td><td>bc</td><td>bd</td></tr><tr><td colspan="2"></td><td></td><td>cd</td></tr></table>	a	b	c	d	ab		ac	ad			bc	bd				cd	6 Comb.									
a	b	c	d																								
ab		ac	ad																								
		bc	bd																								
			cd																								
D	<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>e</td></tr><tr><td colspan="2">ab</td><td>ac</td><td>ad</td><td>ae</td></tr><tr><td colspan="2"></td><td>bc</td><td>bd</td><td>be</td></tr><tr><td colspan="2"></td><td></td><td>cd</td><td>ce</td></tr><tr><td colspan="2"></td><td></td><td></td><td>de</td></tr></table>	a	b	c	d	e	ab		ac	ad	ae			bc	bd	be				cd	ce					de	10 Comb.
a	b	c	d	e																							
ab		ac	ad	ae																							
		bc	bd	be																							
			cd	ce																							
				de																							

Primo in Tabula A patet duas res diversas a. b. una tantum vice posse combinari, seu simul sumi, coniungendo illas hoc modo a b. seu b a. quod unum hic est idemque.

Secundo ut inveniatur, quoties tres res diversæ a. b. c. possint

possint combinari, unam combinationem duarum literarum a. b. in A inventam retinere oportet, & addere unam quæ potest fieri cum a. c, ut & adhuc unam ex b. c. quæ sunt omnes quæ haberi possunt, adeoque tres, ut videre est in B.

Qui numerus 3 Combinationum ex hoc fundamento inventus, etiam brevius obtinetur. si a. b. & ab, tanquam res divisæ addantur in unam summam, ut fiat 3, qui exhibet numerum combinationum trium literarum B.

Tertio. Quia jam tres literæ a. b. c. admittunt 3 combinationes, si ipsi adjungatur quarta d. illa cum singulis semel poterit combinari, ut veniant adhuc tres, quæ cum præcedentibus 6 combinationes faciunt, ut patet in C.

Quod iterum idem est ac si literas a. b. c. & ab. ac. bc. addamus; quippe veniet idem numerus 6, pro combinationibus sequentium quatuor literarum.

Quarto si 4 literas a. b. c. d. & 6 combinationes addamus in unam summam, inveniemus 10 combinationes pro sequentibus 5 literis a. b. c. d. e.

Et sic in infinitum addendo literas cum suis combinationibus inventis prodibit Numerus combinationum, quas admittunt eadem una litera auctæ.

Atque hunc in modum inventa est sequens Tabula, quæ primo intuitu, usque ad Numerum 10 literarum indicat quot diversæ possint fieri combinationes.

Numerus Literarum Numerus Combinationum.

$$\begin{array}{r} 2 \text{ ————— } 1 \\ \phantom{2 \text{ ————— }} 2 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 2 \\ 2 \end{array}} \right\} A$$

$$\begin{array}{r} 3 \text{ ————— } 3 \\ \phantom{3 \text{ ————— }} 3 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 3 \\ 3 \end{array}} \right\} A$$

$$\begin{array}{r} 4 \text{ ————— } 6 \\ \phantom{4 \text{ ————— }} 4 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 6 \\ 4 \end{array}} \right\} A$$

$$\begin{array}{r} 5 \text{ ————— } 10 \\ \phantom{5 \text{ ————— }} 5 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 10 \\ 5 \end{array}} \right\} A$$

$$\begin{array}{r} 6 \text{ ————— } 15 \\ \phantom{6 \text{ ————— }} 6 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 15 \\ 6 \end{array}} \right\} A$$

$$\begin{array}{r} 7 \text{ ————— } 21 \\ \phantom{7 \text{ ————— }} 7 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 21 \\ 7 \end{array}} \right\} A$$

$$\begin{array}{r} 8 \text{ ————— } 28 \\ \phantom{8 \text{ ————— }} 8 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 28 \\ 8 \end{array}} \right\} A$$

$$\begin{array}{r} 9 \text{ ————— } 36 \\ \phantom{9 \text{ ————— }} 9 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 36 \\ 9 \end{array}} \right\} A$$

$$10 \text{ ————— } 45$$

Licet etiam facillime per doctrinam Progressionum supra traditam possit inveniri quot Combinationes propositus quilibetcumque Rerum seu literarum admitat Numerus.

Sint propositæ Ex: gr: sex literæ a b c d e f.
a b c d e f.

ab. ac. ad. ae af...	combinatur a cum b & sequentibus
bc bd be bf...	b e & sequentibus.
cd ce cf...	c d & sequentibus.
de df...	d e & sequentibus.
ef...	e f, ultima,

Ubi combinationes omnes possibiles constitutæ sunt in Progressione Arithmetica. cujus Maximus terminus est 5 Minimus 1. cujus Summa si per Probi: 1 Progress: Arithm: quæratu fiet 15 pro Numero Combinationum.

Atque in Omnibus rerum numeris propositis contingit ut maximus Progressionis terminus sit semper unitate minor numero proposito; ut hic 6 — 1 hoc est 5.

Ex quo fundamento deducitur hæc

Regula.

A numero proposito subtrahæ unitatem, & quære summam Progressionis Arithmeticæ, cujus Maximus Terminus sit ∞ Residuo & Minimus ∞ 1 Numerus Terminorum ∞ eidem Residuo.

E X E M P L U M I.

Vt in hoc eodem Exemplo: quæritur numerus combinationum quas admittunt 6 literæ.

A 6 subtracta unitate remanet 5 pro maximo termino & Numero terminorum : estque Minimus terminus 1. Progressionis quærendæ.

$$\begin{array}{r} \text{Maximus } 5. \\ \text{Minimus } 1. \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} \text{Maximus } 5. \\ \text{Minimus } 1. \end{array}} \right\} A.$$

$$\text{Aggreg : } 6.$$

$$\begin{array}{r} \text{Semif. } 3 \\ \text{Num. Term. } 5 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} \text{Semif. } 3 \\ \text{Num. Term. } 5 \end{array}} \right\} M$$

$$\text{Summa } 15 \text{ omnium Combinationum.}$$

EXEMPLUM II.

Quæritur quot Combinationes admittant literæ 8.

Cum sit 8 — 1 \propto 7 oportet invenire Summam progressionis Arithmeticæ cujus Maximus Terminus & Numerus terminorum singuli sint 7. & minimus Terminus \propto 1.

$$\begin{array}{r} \text{Maximus } 7. \\ \text{Minimus } 1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} \text{Maximus } 7. \\ \text{Minimus } 1 \end{array}} \right\} A$$

$$\text{Aggreg : } 8.$$

$$\begin{array}{r} \text{Sem. Aggreg : } 4. \\ \text{Num Term : } 7 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} \text{Sem. Aggreg : } 4. \\ \text{Num Term : } 7 \end{array}} \right\} M.$$

$$\text{Summa } 28$$

Sic etiam si inquirendum sit quoties ex aliquo rerum seu literarum Numero sumi possint alii atque alii terniones seu Ternarii, binariis jam inventis addendæ sunt singulæ literæ ipsas in ordine sequentes.

Sic

Sic tres literæ a. b. c. admittent tres combinationes, ab. ac. bc. quia jam post binarium *ab* sequitur litera tertia *c*, facit *abc* unum ternarium, præter quem plures non dantur; quia *c* quæ in binariis ac. bc. reperitur est ultima litera: Adeoque tres literæ a. b. c. tantum unicūm continent Ternarium: sc *abc*. seu *bca* sc. *bac*.

Cognitis jam numeri propositi omnibus binariis, & demonstrato tres literas facere unum ternarium, quilibet ternarii, quaternarii facile erui possunt.

a. b. c.		a b c d	
ab ac	3 Binarii	ab ac ad	6 Binarii
O. bc	1 Ternarius	Q be bd	
		cd	4 Ternarii

a. b. c. d.	4. Ternarii,	a b c d e	10 Ternarii
P abc abd	qui conti-	R abc abd abe	rii qui fi-
acd	nentur lite-	acd ace	unt a 5 li-
bcd	ris quatuor.	ade	teris.
		bcd bce	
		bde	
		cde	

Notum jam est tres literas a. b. c. facere tres binarios, O *ab. ac. bc.* quæ singulæ si cum quarta d. conjungantur, venient tres ternarii *abd. acd. bcd*; qui si cum uno ternario 3 literarū a. b. c. sc. *abc.* conjungantur, patet 4 literas a. b. c. d. facere 4 ternarios, ut in P.

Eodem modo ratiocinandum est in Q. R. ubi lique
5 literas facere 10 Terniones.

Sic porro, 5 literæ faciunt.

a.	b.	c.	d.	e.	10 Binarii.	} Ex præcedentibus.
					10 Ternarii	

a.	d.	c.	d.	e.	f.	} 20 Terniones, qui elici possunt ex 6 literis.

Quando epim isti 10 binarii singuli combinantur cum
litera sexta, f; oriuntur 10 ternarii, qui cum 10 ternariis li-
terarum 5 additi, faciunt 20 ternarios 6 literarum.

Simili Methodo reperiri poterunt Quaternarii.

Notum est ex superioribus, quatuor literas dare 4 Ter-
narios.

a.	b.	c.	d.	4 Ternarii	} A
				1 Quaternarius	

a. b. c. d. e. | 5 Quaternarii. literarum 5.

Si enim 4 Ternarii literarum 4 cum litera quinta e com-
binentur venient 4 Quaternarii, qui cum 1 Quaternario
4 literarum additi faciunt 5 Quaternarios 6 Literarum.

Porro.

a	b	c	d	e	} 10 Terniones	} ex præcedentibus

a b. c. d. e. f. | 15 Quaterniones literarum 6.

Quippe si 10 Ternarii literarum 5 cum litera sexta f,
combinentur prodibunt 10 Quaterniones, qui cum 5 Qua-
ter-

ternionibus 5 literarum additi, facient 15 Quaterniones, qui ex 6 literis erui poterunt.

Et sic ulterius.

Eodem modo inuenientur Quinarii.

Ex præcedentibus constat 5 literas exhibere 5 Quaternarios

a. b. c. d. e. 5 Quaternarii } A
1 Quinarius

a. b. c. d. e. f. | 6 Quinarii literarum 6.

Cui enim 5 Quaternarii literarum 5 cum litera 6 combinentur venient 5 Quinarii literarum 6, qui cum uno quinario 5 priorum literarum additi, facient Quinarios 6, quos constituent 6 literæ.

Porro.

a. b. c. d. e. f. 15 Quaternarii. } ex præcedentibus,
6 Quinarii.

a. b. c. d. e. f. g. | 21 Quinarii.

Quia si 15 Quaternarii 6 literarum combinentur cum septima litera combinetur; obtinebuntur 15 Quinarii; qui cum 6 Quinariis 6 priorum literarum additi dabunt 21 Quinarios literarum 7.

Et sic ulterius progrediendo reperiri poterunt Senarii; Septenarii, Octonarii, Novenarii & Denarii & porro in infinitum.

Atque hunc in modum concinnata est Tabula sequens, quæ quia usque ad Numerum Rerum seu literarum, 10 & ad combinationem denarii se extendit non male dicetur.

Quæ-

Quadratum Combinatorium.

Numeri Re- rum s. lite- rarum.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Unitates	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Binarii	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45
Ternarii	0	0	1	4	10	20	35	56	84	120
Quaternarii	0	0	0	1	5	15	35	70	126	210
Quinarii	0	0	0	0	1	6	21	56	126	252
Senarii	0	0	0	0	0	1	7	28	84	210
Septenarii	0	0	0	0	0	0	1	8	36	120
Octonarii	0	0	0	0	0	0	0	1	9	45
Novenarii	0	0	0	0	0	0	0	0	1	10
Denarii	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Quod

Quod Quadratum etiam absque ullo negotio cognitis Rerum seu literarum numeris construi potest hunc in modum.

Pro Unitatibus.

Primo intuitu constat, tot unitates separatim ex quolibet Numero, posse sumi, quot ipse continet Unitates: quare Numeri Unitatum semper Numeris Rerum diversarum sunt coles.

Pro Binariis.

Quia una res nullum adhuc continet binarium: idcirco Numero Rerum 1 in linea Binariorum subscribatur 0.

Cum II res diversæ contineant 1 binarium: Numero II subscribitur 1, in linea Binariorum.

Tum 1 + 2 suprascripto ∞ 3 Binariis sequenti Num. III.

3 + 3 supraposito ∞ 6 Binariis seq. Numeri IV.

6 + 4 superiori ∞ 10 Binariis seq. Numeri V.

10 + 5 supraposito ∞ 15 Binariis seq. Numeri VI.

Et sic porro in infinitum.

Pro Ternariis.

Quia Numerus III continet primum seu 1 Ternarium, sub præcedentibus I & II posita 0, ipsi III subscribitur 1.

Tum 1 + 3 ∞ 4 Ternariis. Sequentis Numeri IV.

4 + 6 ∞ 10 Ternariis. seq. Num. V.

10 ∞ 10 ∞ 20 Ternariis seq. Num. VI.

20 + 15 ∞ 35 Ternariis seq. Num. VII.

Et sic consequenter.

Pro

Pro Quaternariis.

Numerus Rerum IV continet primum seu 1 Quaternarium, quare ipsi IV in Linea Quaternariorum subscribatur 1.

Tum $1 + 4$ supraposito ∞ 5 Quaternariis seq. Num. V.

$5 + 10$ suprascripto ∞ 15 Quaternariis seq. N. VI.

$15 + 20$ supra posito ∞ 35 Quaternariis seq. N. VII.

$35 + 35$ superiori ∞ 70 Quaternariis seq. N. VIII.

Et sic porao.

Pro Quinariis.

Numerus Rerum V facit primum seu 1 Quinarium; atque ideo ipsi V in Linea Quinariorum supponatur 1.

Tum $1 + 5$ Suprascripto ∞ 6 Quinariis seq. N. VI.

$6 + 15$ ——— ∞ 21 Quinariis seq. N. VII.

$21 + 35$ ——— ∞ 56 Quinariis seq. N. VIII.

$56 + 70$ ——— ∞ 126 Quinariis seq. N. IX.

Et sic ulterius in infinitum.

Quod si jam eodem modo procedamus cum Senariis, Septenariis, Octonariis, Novenariis, & Denariis, li-
quido constat Quadratum illud Combinatorium absque ulla
notabili calculatione posse exhiberi.

Porro autem ex præcedenti Quadrato Combinatorio
deduci possunt sequentia Corollaria.

Corollarium I.

Si datus rerum Numerus dividatur in duos alios, qui si-
mul dato sint æquales, illi singuli admittent Combinatione-
nes æque multas.

EXEM-

E X E M P L U M.

Sumamus res diversas 7. qui potest dividi in 2 & 5. ut
& 3 & 4.

Ex Quadrato patet Numerum 7 admittere eundem numerum Binariorum & Quinariorum scilicet 21.

Ut & tot Ternarios quot Quaternarios sc. 35.

Corollarium II.

Quo numeri, secundum quos fit combinatio, utrimque magis accedunt ad medium Numeri dati, eo plures exhibebunt combinationes:

E X E M P L U M.

Sic Numerus rerum 10, plures admittit Binarios & Octonarios sc. 45, quam Unitates & Novenarios, quorum tantum admittit 10.

Deinde plures Ternarios & Septenarios sc. 120, quam Binarios & Octonarios.

Similiter plures Quaternarios & Senarios sc. 210, quam Ternarios & Septenarios.

Corollarium III.

Cum datus est Numerus par, illius Semissis dabit omnium plurimas Combinationes.

E X E M P L U M.

Numerus 4, dabit plurimas Combinationes, seu binarios sc. 6.

Numerus 6 dabit plurimos ternarios, sc. 20

Nume-

Numerus 8 , dabit plurimos quaternarios , sc. 70

Numerus 10 , plurimos quinaros , sc. 252.

Corollarium IV.

Si datur numerus impar , tum duo numeri contigui,
quorum Summa est æqualis Numero dato , dabunt maxi-
mum numerum Combinationum.

E X E M P L U M.

Numerus 5 admittit plurimos binarios & Ternarios sc. 10.

Numeros 7 dabit plurimos Ternarios & Quaternarios
sc. 35.

Numerus 9 exhibebit plurimos Quaternarios & Quinaros
sc. 126.

Et sic porro.

Ut autem statim & unico quasi intuitu cognoscatur,
quot omnis generis combinationes (sc. sive Binarios , sive
Ternarios . Quaternarios , &c.) quilibet propositus admit-
tat numerus , notetur hæc

Regula.

- I Institue Progressionem Arithmeticam descendentem,
cum differentia Unitatis; quæ habet tot terminos,
quot unitates habet Numerus secundum quem debet
fieri combinatio.
- II Fiat Progressio Arithmetica Secunda descendens cum
eadem differentia Unitatis , tot terminorum quot pri-
ma fuit.
- III Productum omnium primæ Progressionis terminorum
in se invicem ductorum divide per Productum o-
mnium Secundæ Progressionis Terminorum.
Quotiens dabit Numerum Combinationum quæsitum.

EXEM-

E X E M P L U M I.

Quæritur quot diversos binarios contineat Numerus Rerum 6.

Progressio I. . . . 6. 5. quia Numerus juxta quem fit Combinatio est 2, ideo illa erit duorum Terminorum.

Progressio II. . . . 2. 1.

Tum productum terminorum I Progressionis sc. 30. si dividatur per terminorum II progressionis Productum 2, veniet quotiens 15, qui designabit binarios quos continet Numerus 6.

Qui etiam hoc modo inveniri facile poterunt: si ponantur 6 literæ.

a	b	c	d	e	f
	ab	ac	ad	ae	af.
		bc	bd	be	bf.
			cd	ce	cf.
				de	df.
					ef.

E X E M P L U M II.

Quæritur quot diversos Ternarios admittat Numerus Rerum 9.

Progressio I . . . 9. 8. 7. . . . Trium terminorum, quia quærantur Ternarii.

Progressio II . . . 3 2 1.

Productum Progressionis I terminorum est 504 } D
Progressionis II terminorum est 6 }

Quotiens est 84

Ee

Tot

Tot nimirum haberi poterunt Ternarii, ut etiam patet ex nostro Quadrato Combinatorio.

E X E M P L U M III.

Quæritur quot diversos Quaternarios admittat Numerus Rerum 10.

Progressi I .. 10. 9. 8. 7 .. Productum ∞ 5040. } D.
 Progressi II .. 4. 3. 2. 1 .. Productum ∞ 24

Quotiens ∞ 210

Qui exhibet numerum Quaternariorum comprehensorum in numero 10, quemadmodum hoc est etiam notatum in nostro Quadrato Combinatorio. Et sic porro.

Scholium.

Cum pateat, quo Numerus Rerum & is juxta quem fieri debet Combinatio proponantur majores, eo majorem & operosiores utriusque Progressionis Terminorum debere fieri multiplicationem, ut & Productorum resultantium divisionem, haud contemnendum huic labori levando poterit adhiberi *Compendium*. Hanc in modum.

- I. Si occurrant in utraque Progressione iidem Termini seu Numeri, illi contra se invicem possunt deleri.
- II. Si ex duobus aut tribus terminis Progressionis Secundæ multiplicando possit inveniri productum, quod sole sit alicui termino, aut producto aliquorum Terminorum Progressionis I, illi Termini talia producta constituentes, contra se invicem rursus poterunt deleri.
- III. Si quidam termini singuli in utraque Progressione admittant communem divisorem, per illum dividantur,

tur, ut Termini tanto fiant minores, adeoque multiplicatio & Divisio fiant breviores.

E X E M P L U M I.

Ut inveniãntur Quaternarii numeri 10, ponuntur hæ Progreſſiones.

A					
10.	9.	8.	7		
4	3	2	1		I Cum in inferiori Progreſſione numeri 2 & 4 per ſe multiplicati faciant 8, qui etiam eſt in ſuperiori, illi tres Numeri poterunt contra ſe invicem deleri, per compendium II, & habebitur ut in B.

B					
10.	9.	1.	7.		
1	3	1	1		II Cum 3 in inferiori & 9 in ſuperiori admittant communem diviſorem 3, per illum dividantur juxta compend. III, & obtinebitur, C.

C					
10.	3.	1.	7		
1	1	1	1		III Hoc factò ſola Multiplicatione numerorum 10. 5. 7 excluſa diviſione obtinetur numerus Quaternariorum quaſitus 210.

E X E M P L U M II.

Ad inveniendos Septenarios Numeri 10, adhibentur hæ Progreſſiones

D					
10	9.	8.	7.		
7	6	5	4		I Utrimque deleantur numeri 7. 6. 5. 4. juxta compendium I, & habebitur E

E c 2 E 10.

E
10. 9. 8. 1. 1. 1. 1.
1 1 1 1 3 2 1

II Numen 3. 2. in inferiori abbreviatur contra 9. 8. in superiori, & fiet. F.

F
10. 3. 4. 1. 1. 1. 1.
1 1 1 1 1 1 1

III Multiplicando numeros 10. 3. 4. per se invicem absque divisione inveniemus Septenariorum numerum quæsitum 120.

Quantum hisce compendiis laborem superfugiamus, ut etiam quodnam illorum sit fundamentum, nullo negotio videbit is, qui in iis quæ de multiplicatione, Divisione, & fractionibus supra notata sunt, vel mediocriter fuerit versatus.

Cæterum istas Progressiones hoc modo invenire licet.

Pro Binaris.

Primo constat ex quolibet cunque rerum numero toties posse sumi singulas, quot continet unitates. Sic ex duabus rebus sumi poterit bis una res diversa. Ex 3 ter. Ex 4 quater. Ex 5 quinquies &c.

Jam autem cuique manifestum est in Numero 2 tantum haberi 1 Binarium

Quod tum si numerum unitatum quæ continentur in numero 2 hoc modo exprimamus $\frac{2}{1}$ ($\infty 2$), & illam

fractionem multiplicemus per $\frac{1}{2}$ hoc est per talem fractionem, cujus Numerator est Numerus rerum propositus unitate multatus. Denominator vero Numerus juxta quam

quem fieri debet Combinatio : oriatur Productum $\frac{2 \text{ in } 1}{2 \text{ in } 1}$
cujus valor $\infty 1$.

Deinde numerus 3 continet unitates diversas 3, quod
forma fractionis sic poterit designari $\frac{3}{1}$

Juxta præcedentia autem in eodem Numero inveniun-
tur Binarii 3.

Qui numerus etiam obtinebitur si fractio $\frac{3}{1}$ multi-
plicetur per $\frac{2}{2}$, hoc est per fractionem cujus Nume-
rator rursus est ∞ numero proposito Unitate multato ;
Denominator vero, Numerus juxta quem fieri debet
Combinatio : Et oriatur productum $\frac{3 \text{ in } 2}{2 \text{ in } 1}$ hoc est 3.

Sic 4 continet unitates 4, quod sic exprimat $\frac{4}{1}$.
At vero Binarios 6. Qui numerus reperietur si fractio
 $\frac{4}{1}$ multiplicetur per $\frac{3}{2}$ id est per fractionem, cujus Nu-
merator est ∞ numero proposito unitate multato ; Deno-
minator vero est Numerus juxta quem fit Combinatio :
Prodibit productum $\frac{4 \text{ in } 3}{2 \text{ in } 1} \infty 6$.

Quod cum similiter eveniat in omnibus Numeris quo-
rum quæruntur binarii omnes diversi : patet Veritas hujus
regulæ pro Binariis ; quæ Numeratorem hujus fractionis

Ee 3

4 in 3

$\frac{4 \text{ in } 3}{2 \text{ in } 1}$ designat per Progressionem Arithmeticam duorum terminorum 4. 3. Denominatorem vero per hanc progressionem 2. 1. & productum terminorum prioris per productum terminorum posterioris dividit.

Pro Ternariis.

Juxta præcedentia binarii in numero 3 contenti, sunt $\frac{3 \text{ in } 2}{2 \text{ in } 1}$ hoc est 3: Inveniemus autem in 3 tantum Ternarium I.

Qui Numerus 1 etiam obtinebitur si 3 hoc est $\frac{3 \text{ in } 2}{2 \text{ in } 1}$ multiplicetur per $\frac{1}{3}$ hoc est per fractionem cujus Numerator sit ∞ numero proposito, binario multato, sc. 3 — 2 id est 1. Denominator vero Numerus juxta quem fit combinatio. Veniet productum $\frac{3 \text{ in } 2 \text{ in } 1}{3 \text{ in } 2 \text{ in } 1}$ id est 1.

Deinde Numerus 4 continet Binarios $\frac{4 \text{ in } 3}{2 \text{ in } 1}$ hoc est 6.

At vero exhebet Ternarios 4. Qui numerus etiam habetur, si 6 seu $\frac{4 \text{ in } 3}{2 \text{ in } 1}$ multiplicetur per $\frac{2}{3}$ id est per fractionem cujus Numerator iterum sit Numerus Rerum propositus binario multatus, sc. 4 — 2 id est 2 Denominator vero Numerus juxta quem fit Combinatio: obtinebitur Productum $\frac{4 \text{ in } 3 \text{ in } 2}{3 \text{ in } 2 \text{ in } 1}$ id est 4.

Porro

Porro Numerus 5 continet binarios 10, id est juxta præcedentia $\frac{5 \text{ in } 4}{2 \text{ in } 1}$. Ternarios autem facit itidem 10.

Qui numerus reperitur si 10 id est $\frac{5 \text{ in } 4}{2 \text{ in } 1}$ multiplicetur per $\frac{3}{3}$ hoc est per fractionem cujus Numerator iterum sit Numerus propositus binario molatus id est 5 — 2. seu 3. Denominator vero Numerus juxta quem fit Combinatio. Orietur Productum $\frac{5 \text{ in } 4 \text{ in } 3}{3 \text{ in } 2 \text{ in } 1}$ id est 10.

Quæ multiplicatio cum semper fiat per fractionem cujus Numerator sit eo Numero rerum proposito — 2. Et Denominator Numerus juxta quem fit Combinatio, clare patet Veritas Regulæ in Ternariis.

Pro Quaternariis.

Numerus 4 juxta priora continet Ternarios $\frac{4 \text{ in } 3 \text{ in } 2}{3 \text{ in } 2 \text{ in } 1}$ id est 4. Quaternarium vero tantum 1. Qui numerus quoque invenietur si 4 id est $\frac{4 \text{ in } 3 \text{ in } 2}{3 \text{ in } 2 \text{ in } 1}$ multiplicetur per $\frac{1}{4}$ hoc est per fractionem, cujus Numerator sit eo Numero rerum proposito — 3. Denominator vero Numerus juxta quem fit Combinatio, venietque Productum $\frac{4 \text{ in } 3 \text{ in } 2 \text{ in } 1}{4 \text{ in } 3 \text{ in } 2 \text{ in } 1}$ hoc est 1.

Numerus 5 continet Ternarios $\frac{5 \text{ in } 4 \text{ in } 3}{3 \text{ in } 2 \text{ in } 1}$ id est 10.

Quaternarios vero tantum 5. Qui numerus reperietur si 10 id est $\frac{5 \text{ in } 4 \text{ in } 3}{3 \text{ in } 2 \text{ in } 1}$ multiplicetur per $\frac{2}{4}$ id est per fractionem cujus Numerator sit ∞ Numero proposito — 3. sc. 5 — 3 id est 2. Denominator vero Numerus juxta quem fit Combinatio, acquireretur Productum $\frac{5 \text{ in } 4 \text{ in } 3 \text{ in } 2}{4 \text{ in } 3 \text{ in } 2 \text{ in } 1}$ hoc est 5.

Et sic porro pro Quaternariis debet Ternariorum Numerus multiplicari per fractionem cujus Numerator sit Numerus rerum propositus Ternario multatus. Denominator vero Numerus juxta quem fieri debet Combinatio: Cujus Multiplicationis Productum semper exhibebit Progressiones Arithmeticas in Regula præscriptas.

Pro Quinariis.

Numerus 5 continet Quaternarios 5, id est $\frac{5 \text{ in } 4 \text{ in } 3 \text{ in } 2}{4 \text{ in } 3 \text{ in } 2 \text{ in } 1}$ Quaternarium vero tantum 1, Qui

numerus etiam obtinebitur si 5 id est $\frac{5 \text{ in } 4 \text{ in } 3 \text{ in } 2}{4 \text{ in } 3 \text{ in } 2 \text{ in } 1}$

multiplicetur per $\frac{1}{5}$, hoc est per fractionem, cujus Numerator sit ∞ Numero rerum propositarum quaternario multato. Denominator vero Numerus juxta quem fieri debet combinatio: Ex qua multiplicatione
pro-

prohibet productum, $\frac{5 \text{ in } 4 \text{ in } 3 \text{ in } 2 \text{ in } 1}{5 \text{ in } 4 \text{ in } 3 \text{ in } 2 \text{ in } 1}$ id est 1 ut supra.

Deinde Numerus 6 continet Quaternarios 15 id est $\frac{6 \text{ in } 5 \text{ in } 4 \text{ in } 3}{4 \text{ in } 3 \text{ in } 2 \text{ in } 1}$ Quinarios vero tantum 6. Qui

Numerus quoque acquireretur si 15 seu $\frac{6 \text{ in } 5 \text{ in } 4 \text{ in } 3}{4 \text{ in } 3 \text{ in } 2 \text{ in } 1}$

multiplicetur per $\frac{2}{5}$, id est fractionem cujus Nu-

merator sit ∞ Numero rerum proposito — 4. De-

nominator vero Numerus juxta quem fiet Combinatio,

Orietur Productum $\frac{6 \text{ in } 5 \text{ in } 4 \text{ in } 3 \text{ in } 2}{5 \text{ in } 4 \text{ in } 3 \text{ in } 2 \text{ in } 1}$ id est 6

ut requiritur.

Et sic porro pro Quinariis sequentium Numerorum.

Simili methodo in Senariis, Septenariis, Octonariis, Novenariis, Denariis, &c. procedendo inveniemus easdem Progressiones Arithmeticas, quas ponere jubet Regula.

CAPUT IV.

De Permutationibus.

Hucusque de Combinationibus egimus, ubi consideravimus quot ex certo rerum numero dato, ex: gr: 8 literis, haberi possint diversi binarii literarum, quot ternarii diversi, quot quaternarii, quaternarii & sic porro. Cum autem longe aliter sese res habeat, quando quæritur quoties octo illæ literæ datæ inter se misceri possint sic ut semper accipiantur omnes solo ordine mutato: haud abs re fore putamus, si etiam quædam afferamus, quæ spectant methodum eruendi omnes istas permutationes in numero aliquo rerum vel literarum possibiles.

Quod ut majori cum fructu fiat, ordine procedendum erit, & initium sumendum a simplicioribus. ut ex iis hausto certo fundamento ad magis composita tutius transeuntes generale aliquid statuere possimus. Sequemur ordinem literarum Alphabeti.

I Sola litera A nullam omnino subit permutationem.

II Duæ A B duas admittunt, aut enim est A ante B. sc: A B, aut B ante A, ut B A.

a b

b a

III Si istis duabus accedat tertia C, illa in primo ordine poni poterit post B. vel post A, vel ante A
ut

ut etiam in secundo ordine post A vel post B vel ante B.

Primus ordo abc. acb. cab.

Secundus ordo bac bca cba.

Adeoque tres literæ 6 subire possunt permutationes.

IV Cum quibus si quarta D jungatur, illa apud singulas ex istis 6. quatuor diversa potest obtinere loca, scilicet post tertiam; post secundam, post primam, & ante primam; unde loco unius 4 diversæ prodeant permutationes; quod cum sexies fieri possit, sequitur 4 literas admittere permutationes 24, quæ tales sunt.

abcd abdc adbc dabc

acbd acdb adcb dacb

cabd cadb cdab dcab

bacd badc bdae dbac

bcad bcda bdca dbca

cbad cbda cdba dcba

V Quod si adhuc addatur quinta E, patet illam apud singulas ex istis 24 posse occupare quinque diversa loca, sc: post quartam, post tertiam, post secundam, post primam & ante primam: ita ut loco unius statim emergant 5 diversæ permutationes: idque cum 24 vicibus fieri possit manifestum est 5 literas 120 diversas pati permutationes:

abcde	abced	abecd	aebcd	eabcd
acbde	acbed	acebd	aecbd	eacbd
cabde	cabed	caebd	ceabd	ecabd
bacde	baced	baecd	beacd	ebacd
bcade	bcaed	bcead	becad	ebcad
cbade	cbaed	cbead	cebad	ecbad

abdce	abdec	abedc	aebdc	eabdc
acdbe	acdeb	acedb	aecdb	eacdb
cadbe	cadeb	caedb	ceadb	ecadb
badce	badec	baedc	beadc	ebadc
bcdae	bcdea	bceda	becda	ebcda
cbdae	cbdea	cbeda	cebda	ecbda

adbce	adbec	adebc	aedbc	eadbc
adcbe	adceb	adecb	aedcb	eadcb
cdabe	cdaeb	cdeab	cedab	ecdab
bdace	bdaec	bdeac	bedac	ebdac
bdcae	bdcea	bdeca	bedca	ebdca
cdbae	cdbea	cdeba	cedba	ecdba

dabce	dabec	daebe	deabc	edabc
dacbe	daceb	daecb	deacb	edacb
dcabe	dcaeb	dceab	decab	edcab
dbace	dbaec	dbeac	debac	edbac
dbcae	dbcea	dbeca	debca	edbca
dcbae	dcbea	dceba	decba	edcba

VI. Si jam istis 5 literis accedat sexta F, illa in singulis præcedentium 120 poterit collocari 6 diversis locis; sc post quintam, post quartam, post tertiam, post secundam, post primam & denique ante primam; quare rursus loco unius obtinebuntur 6 diversæ permutationes, Hinc quia illud potest fieri 120 vicibus, liquet 6 literas 720 vicibus posse permutari.

Eodem modo reperiemus 7 literas admittere permutationes 5040: & sic porro, plurium literarum permutationes eodem ratiocinio ex proxime præcedentibus deducere licet.

Ut autem tandem stabiliatur Regula generalis, per quam possint inveniri permutationes omnes quas quotlibet res diversæ admittant, diligenter consideranda erunt illa quæ hucusque dicta sunt.

Ex quibus patet 1 Literam tantum 1 obtinere situm: 2 vero literas 2 admittere situs: seu 2 subire permutationes; quem numerum 2 videmus deduci ex multiplicatione 2 rerum diversarum per 1 situm unius rei: quia iste numerus binarius Rerum diversarum est causa quare unus iste situs mutetur in duas. Itaque multiplicato 1 per 2 obtinentur permutationes omnes rerum duarum, quæ sunt 2.

Res Permutationes.

1	—————	1	} M
		2	
		2	} M
2	—————	3	
3	—————	6	} M
		4	
4	—————	24	} M
		5	
5	—————	120	} M
		6	
6	—————	720	} M
		7	
7	—————	5040	} M
		8	
8	—————	40320	} M
		9	
9	—————	362880	} M
		10	
10	—————	3628800	

Et sic porro.

Quo modo si ulterius procedere libeat, reperiemus semper sic se rem habere, ut multiplicato numero permutationum aliquot literarum vel rerum diversarum per numerum proxime sequentem obtineatur numerus permutationum ejusdem numeri rerum.

Deinde vidimus 3 literas pati 6 permutationes, qui numerus iterum producit ex multiplicatione 3, numerum rerum diversarum per 2 numerum duarum permutationum literarum duarum: Quare tursus multiplicando 2 productum ex 2 in 1 per 3 sequentem acquirimus omnes permutationes rerum trium diversarum sc. 6.

Similiter cum 4 literæ admittant 24 permutationes 4, qui numerus prodit ex multiplicatione numeri quatuor rerum diversarum per 6, numerum permutationum diversarum quæ 3 literis accidunt; Multiplicando 6 productum ex 3 in 2 per sequentem 4, obtinetur 24, numerus omnium permutationum, quæ habentur in 4 literis.

Unde

Unde fit, ut numeri 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. &c : in Arithmetica progressionem per unitatem ascendente, ordine per se multiplicati exhibeant omnes permutationes, quas numerus multiplicans admittere potest.

Quem in modum constructam tabellam a latere posita exhibemus, in qua prioris columnæ numeri significant Res diversas; alterius vero numeri Permutationes numerorum sibi respondentium denotant.

Quod si vero contingat, ut inter res seu literas datas, duæ aut plures res sint similes seu eadem, tum illarum permutationes hoc modo colligere licet.

Sumamus ex: gr: tres literas a. a. b, illæ juxta tabulam 6 permutationes subire possint, quales sunt

aba. aab. aab.

baa baa aba.

Quarum cum ter binæ ac binæ sint eadem, patet non 6 diversas sed tantum 3 prodire permutationes.

Qui numerus 3 acquiritur numerum permutationum pro tribus literis diversis, dividendo per 2, sc. numerum permutationum quæ 2 literis accidunt; quia in nostro Exemplo sunt 2 res similes vel eadem bis.

Eodem modo si 4 literarum ponamus 3 easdem, ut a. a. a. b. reperiemus, in supra inventis 4 literarum 24 permutationibus loco literarum c. d. ponendo literam a, tantum obtineri 4 diversas, Quod ut in ipso Exemplo pateat nos illas cum literis mutatis hic apponemus; easque

abaa abaa aaba aaba

aaba aaba aaba aaba

abaa aaba aaba aaba

baaa baaa baaa abaa

baaa baaa baaa abaa

abaa abaa aaba aaba

omnes

Series rerum diversarum.	Permut. rerum omnium diversarum.	Permut. ubi res 2 Similes	3 Similes	4 Similes
I	0			
II	2	0		
III	6	3	0	
IV	24	12	4	0
V	120	60	20	5
VI	720	360	120	30
VII	5040	2520	840	210
VIII	40320	20160	6720	1680
IX	362880	181440	60480	15120
X	3628800	1814400	604800	151200
	I	II	III	IV

5 Similes	6 Similes	7 Similes	8 Similes	9 Similes
0				
6	0			
42	7	0		
336	56	8	0	
3024	504	72	9	0
30240	5040	720	90	10
V.	VI	VII	VIII	IX

De Arithmetica Divinatoria.

Hæc est modus solvendi problemata & quæstiones propositas adeo occulte, ut revera divinationis speciem præ se ferat.

PROBLEMA I.

Divinare numerum ab alio cogitatum.

Regula I.

- 1 Is qui numerum cogitavit, illius sumat duplum.
- 2 Huic duplo addat 5.
- 3 Et illam summam multiplicet per 10, & hujus productum adhuc semel per 5.
- 4 Quære ex illo quem habeat numerum, & ab eo subtrahere 250.
- 5 Reliquum per 100 divide & quotiens dabit numerum cogitatum.

EXEMPLUM.

Cogitaverit aliquis numerum 4.

$$\begin{array}{r}
 4 \quad \} M \\
 2 \quad \} \\
 \hline
 8 \quad \} A \\
 5 \quad \} \\
 \hline
 13 \quad \} M \\
 10 \quad \} \\
 \hline
 130 \quad \} M \\
 5 \quad \} \\
 \hline
 650 \quad \} S \\
 250 \quad \} \\
 \hline
 400 \quad \} D \\
 100 \quad \} \\
 \hline
 \end{array}$$

4 Numerus cogitatus

$$\begin{array}{r}
 6 \quad \} M \\
 2 \quad \} \\
 \hline
 12 \quad \} A \\
 5 \quad \} \\
 \hline
 17 \quad \} M \\
 10 \quad \} \\
 \hline
 170 \quad \} M \\
 5 \quad \} \\
 \hline
 850 \quad \} S \\
 250 \quad \} \\
 \hline
 600 \quad \} D \\
 100 \quad \} \\
 \hline
 \end{array}$$

6 Numerus cogitatus.

Re-

De Arithmetica Divinatoria. 453

Regula I I.

- I Alter illum numerum cogitatum , per quemlibet numerum multiplicet.
- II Illud productum iterum per alium dividat ; commodius fit abque residuo :
- III Istum quotientem adhuc semel per alium multiplicet.
- IV Et acquisitum iterum per alium dividat.
- V Tu interim secreto assume aliquem alium numerum quem etiam multiplicabis & divides per eodem numeros.
- VI Jube ut ultimum numerum dividat per numerum cogitatum , quando tu pariter divides ultimum tuum per numerum primò assumptum :
- VII Hoc facto habebis cum altero eundem quotientem , cui jube ut addat numerum cogitatum , & summam tibi notam faciat.
- VIII Si ab illa quotientem istum ultimum subtrahas , numerum quæsitum habebis.

Sit numerus cogitatus 6.

Numerus assumptus 4.

$$\begin{array}{r} 6 \\ 4 \end{array} \} M$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 8 \end{array} \} D$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 12 \end{array} \} M$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ 6 \end{array} \} D$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 6 \end{array} \} \text{Numerus cogitatus.}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 6 \end{array} \} \text{Quotiens utrinque idem}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 6 \end{array} \} \text{Numerus cogitatus.}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 4 \end{array} \} M$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 8 \end{array} \} D$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 12 \end{array} \} M$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 4 \end{array} \} D$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 6 \end{array}$$

Ff 3

12 Sum

54 *Pars III. Caput V.*

12 } S Summa.
6 } Quotiens.

6 Numerus cogitatus.

Regula III.

- I Alter numerum suum cogitatum multiplicet per 3,
II Productum, dividat per 2,
III Istam semissim iterum multiplicet per 3.
IV Istud productum tibi notum faciat : quod si divides per
9, & quotientem per 2 multiplices, habebis nume-
rum cogitatum.

Cogitet quis 6) M

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 18} \\ 2 \overline{) 9} \\ 3 \overline{) 27} \\ 2 \overline{) 54} \end{array}$$

6 Num. cogitatus.

Habeat quis 5) M

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 15} \\ 2 \overline{) 7.5} \\ 3 \overline{) 22.5} \\ 2 \overline{) 67.5} \\ 3 \overline{) 202.5} \end{array}$$

5 N. cogitatus.

Si qui sint fractionum ignari, illis sic operari licebit :
Si sit numerus assumptus impar, ille juxta præceptum I per
3 multiplicatus semper faciet productum impar, quod juxta
præceptum II per 2 dividi nequit, tum ipsi addunt unitatem,
ut fiat par ; & bifariam dividunt, quotientisque triplum
jam

jam notum per 9 dividunt, & quotiens, neglecto residuo addunt unitatem, ut summa exhibeat numerum cogitatum.

Sit iterum numerum cogitatus 5.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 5 \overline{) 15} \\
 \underline{10} \\
 5
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 3 \overline{) 16} \\
 \underline{12} \\
 4
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 2 \overline{) 24} \\
 \underline{20} \\
 4
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 M \\
 A \\
 D \\
 A \\
 M \\
 A
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 24 \overline{) 240} \\
 \underline{192} \\
 48 \\
 \underline{48} \\
 0
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 M \\
 A \\
 A \\
 A
 \end{array}$$

5. Numerus cogitatus.

24

PROBLEMA II.

Divinare plures numeros cogitatos denario minores.

Regula.

- I Alter multiplicet primum numerum per 2 & producto addat 5.
- II Summam multiplicet per 5 & producto addat 10.
- III Huius summae addat numerum secundum cogitatum, & multiplicet summam per 10.
- IV Isti producto addat numerum tertium & summam iterum multiplicet per 10.
- V Adde numerum quartum: & ita porro si plures fuerint.
- VI Dicatur tibi Summa, & ab eo subtrahere 35 si sint duo numeri inveniendi: si vero tres subtrahere 350: & si quatuor 3500 &c. Et tunc locus unitatum dabit ultimum numerum cogitatum: Decadum penultimum, Centenarium antepenultimum; & sic porro.

436. *Pars III. Caput V.*

Sint cogitati tres numeri 6. 7. 8.

Primus numerus

$$\begin{array}{r} 6 \\ 2 \end{array} \} M$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 5 \end{array} \} A$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 5 \end{array} \} M$$

$$\begin{array}{r} 85 \\ 10 \end{array} \} A$$

$$\begin{array}{r} 95 \\ 7 \end{array} \} A$$

Secundus numerus

$$\begin{array}{r} 102 \\ 10 \end{array} \} M$$

$$\begin{array}{r} 1020 \\ 8 \end{array} \} A$$

Tertius numerus

$$\begin{array}{r} 1928 \\ 350 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 678 \end{array}$$

Tres numeri cogitati.

Similiter sint quatuor numeri cogitati 2. 3. 4. 5.

Primus numerus

$$\begin{array}{r} 2 \\ 2 \end{array} \} M$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 5 \end{array} \} A$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ 5 \end{array} \} M$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ 10 \end{array} \} A$$

Secundus numerus

$$\begin{array}{r} 58 \\ 3 \end{array} \} A$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 58 \\
 10 \end{array} \Big) M \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 580 \\
 4 \end{array} \Big) A \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 584 \\
 10 \end{array} \Big) M \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 5840 \\
 5 \end{array} \Big) A \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 5845 \\
 3500 \end{array} \Big) S \\
 \hline
 2345 \text{ Quatuor numeri cogitati.}
 \end{array}$$

Scholium.

Hujus Problematis solutione nititur illud, quod vulgus non satis admirari potest; eique magicum quid audit, sc. de annulo, quem quidam in aliquo consortio digito insertum habet. Illud autem sic habet: In consortio aliquot hominum quidam gerit annulum; quæritur si illi numerentur ab uno quo quodam facto initio, ut & manus, cujusque censeantur ut prima & secunda: præterea digitorum, & eorundem articulorum, servetur ordo, quota persona, quota manu, quoto digito, quoto digiti articulo annulum gerat.

Ponamus ex: gr: annulum latere apud nonam personam, manu secunda: digito quinto: articulo quarto.

Cui exemplo sic præcedentem applicamus Regulam

$$\begin{array}{r}
 \text{Numerus personæ} \quad \begin{array}{r} 9 \\ 2 \end{array} \Big) M. \\
 \hline
 \begin{array}{r} 18 \\ 5 \end{array} \Big) A. \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r} 23 \\ \hline 5 \end{array} \} M. \\
 \begin{array}{r} 165 \\ \hline 10 \end{array} \} A. \\
 \begin{array}{r} 125 \\ \hline 2 \end{array} \} A \\
 \text{Numerus manus} \\
 \begin{array}{r} 127 \\ \hline 10 \end{array} \} M \\
 \begin{array}{r} 1270 \\ \hline 5 \end{array} \} A \\
 \text{Numerus digiti} \\
 \begin{array}{r} 1275 \\ \hline 10 \end{array} \} M \\
 \begin{array}{r} 12750 \\ \hline 4 \end{array} \} A \\
 \text{Numerus articuli} \\
 \begin{array}{r} 12754 \\ \hline 3500 \end{array} \} S \\
 \hline
 9254
 \end{array}$$

Qui numeri exacte quaestioni satisfaciunt: cum primus a sinistra denotet personam nonam, secundus 2 manum secundam: tertius 5 digitum quintum, quartus 4 articulum quartum.

Notandum autem est numeros manus, digitorum & articulorum debere esse denario minores.

Exceptionem autem patitur numerus primus sc. Personae quae major denario sumi potest:

Ponatur ergo Persona vigesima, manus prima: digitus quartus articulus 3.

Persona	$\begin{array}{r} 20 \\ 2 \end{array} \bigg) M$
	$\begin{array}{r} 40 \\ 3 \end{array} \bigg) A$
	$\begin{array}{r} 45 \\ 5 \end{array} \bigg) M$
	$\begin{array}{r} 225 \\ 10 \end{array} \bigg) A$
Manus	$\begin{array}{r} 235 \\ 1 \end{array} \bigg) A$
	$\begin{array}{r} 236 \\ 10 \end{array} \bigg) M$
Digitus	$\begin{array}{r} 2360 \\ 4 \end{array} \bigg) A$
	$\begin{array}{r} 2364 \\ 10 \end{array} \bigg) M$
Articulus	$\begin{array}{r} 23640 \\ 3 \end{array} \bigg) A$
	$\begin{array}{r} 23643 \\ 3500 \end{array} \bigg) S$
	20.1.4.3

Quod residuum quæsitos ordine comprehendit numeros.
 Nam locus unitatum 3, notat articulum tertium. Decadum
 locus 4 digitum : Centuriarum 1 manum : Reliqui duo si-
 mul personam cum tantum quatuor desiderentur numeri.

PROBLEMA III.

Alius modus inveniendi tres Numeros ab alio cogitatos.

Regula.

I Dicat tibi Summam primi & secundi ; item secundi &
 tertii , ut & tertii & primi,

II Tum

II. Tum Tu secretò summam primi & secundi adde ad summam primi & tertii.

III Ab hac summa subtrahæ summam secundi & tertii.

IV Residuum divide per 2, & habebis numerum cogitatum primum.

Qui subtractus à summa primi & secundi relinquit secundum.

Et hic subtractus à summa secundi & tertii relinquit tertium.

Sint numeri cogitati I. II. III.

$$\begin{array}{rcl}
 & & 7 \quad 5 \quad 3. \\
 \text{I} \ \& \ \text{II} \infty 12. & \left. \begin{array}{l} \text{I} \ \& \ \text{II} \infty 12 \\ \text{II} \ \& \ \text{III} \infty 8. \\ \text{III} \ \& \ \text{I} \infty 10. \end{array} \right\} & \begin{array}{l} \text{I} \ \& \ \text{II} \infty 12 \\ \text{III} \ \& \ \text{I} \infty 10 \end{array} \Big) \text{A} \\
 & & \underline{\hspace{1.5cm}} \\
 & & 22 \\
 \text{II} \ \& \ \text{III} & & \Big) \text{S} \\
 & & \underline{\hspace{1.5cm}} \\
 & & 14 \\
 & & \Big) \text{D} \\
 & & \underline{\hspace{1.5cm}} \\
 & & 2
 \end{array}$$

Numerus I cogitatus $\begin{array}{r} 7 \\ 12 \end{array}$ Subtr. minorem à majori.

Numerus II cogitatus $\begin{array}{r} 5 \\ 8 \end{array}$ S eodem modo.

Numerus III cogitatus $\begin{array}{r} 3 \end{array}$

Eadem via pro 4 numeris cogitatis sequens invenitur.

Regula.

Detur tibi summa I & II Tum II & III. Deinde III & IV. Denique summam semisseos I & totius IV.

Quo facto.

II Tu duplum ultimæ summæ datæ, (sc. semisseos I & totius IV) ad summam II & III adde: illudque aggregatum dicatur M.

III Dein-

III Deinde summam I & II adde ad summam III & IV,
quod aggregatum similiter dicatur N: quod debet ca-
veri ut si minus quam M

IV Aggregatum N subtrahe ab aggregato M; eritque resi-
duum Numerus IV cogitatus,

Hic IV	} Subductus à summa	{	III & IV dat III.
Hic III			II & III dat II.
Hic II			I & II dat I.

E X E M P L U M I.

I ∞ 8		I & II ∞ 14
II ∞ 6		II & III ∞ 10
III ∞ 4	Eritque Summa	III & IV ∞ 6
IV ∞ 2		$\frac{1}{2}$ I & IV ∞ 6

Tum juxta Regulam

Duplum ultimæ summæ ∞ 12) A	I & II ∞ 14) A
Summa II & III ∞ 10		III & IV ∞ 6	
Aggregatum M ∞ 22) S	Aggreg. N. ∞ 20	
Aggreg. N ∞ 20			
Numerus IV cogitatus 2			

III & IV ∞ 6) S	II & III ∞ 10) S	I & III ∞ 14) S
IV ∞ 2		III ∞ 4		II ∞ 6	
III ∞ 4		II ∞ 6		I ∞ 8	

Adéoque omnes numeri inventi sunt iudem cum nume-
ris cogitatis.

E X E M P L U M I I.

Sunt numeri cogitati

$$I \infty 2$$

$$II \infty 5$$

$$III \infty 6$$

$$IV \infty 10$$

Britque Summa

$$I \& II \infty 7$$

$$II \& III \infty 11$$

$$III \& IV \infty 16$$

$$\frac{1}{2} I \& IV \infty 11$$

Tum iterum juxta Regulam.

$$\begin{array}{l} \text{Duplum ultimæ summæ} \infty 22 \\ \text{Summæ II \& III} \infty 11 \end{array} \Bigg) A \quad \begin{array}{l} I \& II \infty 7 \\ III \& IV \infty 16 \end{array} \Bigg) A$$

$$\begin{array}{l} \text{Aggregatum M} \infty 33 \\ \text{Aggregatum N} \infty 23 \end{array} \Bigg) S \quad \text{Aggreg. N} \infty 2;$$

$$\text{Numerus IV cogitatus} \infty 10$$

Deinde sic.

$$\begin{array}{l} III \& IV \infty 16 \\ IV \infty 10 \end{array} \Bigg) S \quad \begin{array}{l} II \& III \infty 11 \\ III \infty 6 \end{array} \Bigg) S \quad \begin{array}{l} I \& II \infty 7 \\ II \infty 5 \end{array} \Bigg) S$$

$$\begin{array}{l} III \infty 6 \\ II \infty 5 \\ I \infty 2 \end{array}$$

Qui iterum cum prioribus conveniunt.

Scholium.

Si jam hæc operandi methodus applicetur Problemati de inveniendò annulo, patebit illud satis commodè per hanc Regulam posse resolvi, & quidem generalius, cum non distinguat numeros sive sint denario majores sive minores vel æquales; modo unica ista adhibeatur cantela ut sc. aggregatum M sit majus aggregato N.

Ponamus itaque Personam decimam sextam, manu prima, digito quinto, articulo tertio annulum gerere; & sit numerus

I Per-

De Arithmetica Divinatoria. 463

I Persona	16		I & II	∞ 17
II Manus	1	Eritque summa	II & III	∞ 6
III Digitus	5		III & IV	∞ 8
IV Articulus	3		$\frac{1}{2}$ I & IV	∞ 11

Et juxta Regulam fiat.

Duplum ultimæ summæ	∞ 22	} A	I & II	∞ 17	} A
II & III	∞ 6		III & IV	∞ 8	
Aggregatum M	∞ 28	} S	25 Agg. N		
Aggregatum N	∞ 25				
Num. IV. Articulus	∞ 3				

Tum porro.

III & IV	∞ 8	} S	II & III	∞ 6	} S	I & II	∞ 17	} S
IV	∞ 3		III	∞ 5		II	∞ 1	
III Digit.	∞ 5		II Manus	∞ 1		I Pers.	∞ 16	

Qui omnes cum præcedentibus conveniunt.

P R O B L E M A I I.

Tertius modus inveniendi 4 numeros ab alios cogitatos.

Regula.

I Dicat tibi summam I. II. & III. Deinde II. III. & IV.

Tum III. IV & I. Denique IV. I & II.

II Tu secreto colligas istas summas in unam, eamque divide per 3.

III A quotiente si seorsim singulas summas subtrahas, habebis singulos numeros cogitatos, hoc sc. ordine.

Si subtrahas summam Primam, veniet IV

Secundam	I
Tertiam	II
Quartam	III

EXEM-

E X E M P L U M.

Sint numeri cogitati

I ∞ 2	Erga summa	I.	II.	&	III ∞ 14	} A	
II ∞ 8		II.	III	&	IV ∞ 15		
III ∞ 4		III.	IV	&	I ∞ 9		
IV ∞ 3		IV.	I.	&	II ∞ 13		
Tripla summa numerorum 51							} D
cogitatorum 3							

Summa cogitatorum ∞ 17

I. II. III. IV	∞ 17.	} S.	I. II. III. IV.	∞ 17.	} S
I. II. III.	∞ 14.		II. III. IV.	∞ 15.	
IV cogitatus	∞ 3.		I. cogitatus	∞ 2.	
I. II. III. IV	∞ 17.	} S.	I. II. III. IV.	∞ 17	} S
I. III. IV.	∞ 9.		I. II. IV.	∞ 13	
II.	∞ 8.		III	∞ 4.	

Qui omnes cum præcedentibus iterum sunt iidem.

Hæc autem resolutionis forma cum a priori multum differat, etiam aliam inveniendi annuli suppeditat Regulam.

Sed ne nimis prolixi simus, pluribus hujus generis, quæ apud alios abunde reperiuntur, superfedebimus.

Tabula Quadratorum.

465

C A P VI.

Continens Tabulam Quadratorum.

Rad.	Quad.	Rad.	Quad.	Rad.	Quad.
1	1	31	961	61	3721
2	4	32	1024	62	3844
3	9	33	1089	63	3969
4	16	34	1156	64	4096
5	25	35	1225	65	4225
6	36	36	1296	66	4356
7	49	37	1369	67	4489
8	64	38	1444	68	4624
9	81	39	1521	69	4761
10	100	40	1600	70	4900
11	121	41	1681	71	5041
12	144	42	1764	72	5184
13	169	43	1849	73	5329
14	196	44	1936	74	5476
15	225	45	2025	75	5625
16	256	46	2116	76	5776
17	289	47	2209	77	5929
18	324	48	2304	78	6084
19	361	49	2401	79	6241
20	400	50	2500	80	6400
21	441	51	2601	81	6561
22	484	52	2704	82	6724
23	529	53	2809	83	6889
24	576	54	2916	84	7056
25	625	55	3025	85	7225
26	676	56	3136	86	7396
27	729	57	3249	87	7569
28	784	58	3364	88	7744
29	841	59	3481	89	7921
30	900	60	3600	90	8100
				91	8281
				92	8464
				93	8649
				94	8836
				95	9025
				96	9216
				97	9409
				98	9604
				99	9801
				100	10000
				101	10201
				102	10404
				103	10609
				104	10816
				105	11025
				106	11236
				107	11449
				108	11664
				109	11881
				110	12100
				111	12321
				112	12544
				113	12769
				114	12996
				115	13225
				116	13456
				117	13689
				118	13924
				119	14161
				120	14400

Rad. Quad. Rad. Quad. Rad. Quad.

121	14641	151	22801	181	32761
122	14884	152	23104	182	33124
123	15129	153	23409	183	33489
124	15376	154	23716	184	33856
125	15625	155	24025	185	34225
126	15876	156	24336	186	34596
127	16129	157	24649	187	34969
128	16384	158	24964	188	35344
129	16641	159	25281	189	35721
130	16900	160	25600	190	36100
131	17161	161	25921	191	36481
132	17424	162	26244	192	36864
133	17689	163	26569	193	37249
134	17956	164	26896	194	37636
135	18225	165	27225	195	38025
136	18496	166	27566	196	38416
137	18769	167	27889	197	38809
138	19044	168	28224	198	39204
139	19321	169	28561	199	39601
140	19600	170	28900	200	40000
141	19881	171	29241	201	40401
142	20164	172	29584	202	40804
143	20449	173	29929	203	41209
144	20736	174	30276	204	41616
145	21025	175	30625	205	42025
146	21316	176	30976	206	42436
147	21609	177	31329	207	42849
148	21904	178	31684	208	43264
149	22201	179	32041	209	43681
150	22500	180	32400	210	44100

Rad. Quad. Rad. Quad. Rad. Quad.

211	44521	241	58081	271	73441
212	44944	242	58564	272	73984
213	45369	243	59049	273	74529
214	45796	244	59536	274	75076
215	46225	245	60025	275	75625
216	46656	246	60516	276	76176
217	47089	247	61009	277	76729
218	47524	248	61504	278	77284
219	47961	249	62001	279	77841
220	48400	250	62500	280	78400
221	48841	251	63001	281	78961
222	49284	252	63504	282	79524
223	49729	253	64009	283	80089
224	50176	254	64516	284	80656
225	50625	255	65025	285	81225
226	51076	256	65536	286	81796
227	51529	257	66049	287	82369
228	51984	258	66564	288	82944
229	52441	259	67081	289	83521
230	52900	260	67600	290	84100
231	53361	261	68121	291	84681
232	53824	262	68644	292	85264
233	54289	263	69169	293	85849
234	54756	264	69696	294	86436
235	55225	265	70225	295	87025
236	55696	266	70756	296	87616
237	56169	267	71289	297	88209
238	56644	268	71824	298	88804
239	57121	269	72361	299	89401
240	57600	270	72900	300	90000

<i>Rad.</i>	<i>Quad.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quad.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quad.</i>
301	90601	331	109561	361	130321
302	91204	332	110224	362	131044
303	91809	333	110889	363	131769
304	92416	334	111556	364	132496
305	93025	335	112225	365	133225
306	93636	336	112896	366	133956
307	94249	337	113569	367	134689
308	94864	338	114244	368	135424
309	95481	339	114921	369	136161
310	96100	340	115600	370	136900
311	96721	341	116281	371	137641
312	97394	342	116964	372	138384
313	97969	343	117649	373	139129
314	98596	344	118336	374	139876
315	99225	345	119025	375	140625
316	99856	346	119716	376	141376
317	100489	347	120409	377	142129
318	101124	348	121104	378	142884
319	101761	349	121801	379	143641
320	102400	350	122500	380	144400
321	103041	351	123201	381	145161
322	103684	352	123904	382	145924
323	104329	353	124609	383	146689
324	104976	354	125316	384	147456
325	105625	355	126025	385	148225
326	106276	356	126736	386	148996
327	106929	357	127449	387	149769
328	107584	358	128164	388	150544
329	108241	359	128881	389	151321
330	108900	360	129600	390	152100

Rad. Quad. Rad. Quad. Rad. Quad.

391	152881	421	177241	451	203401
392	153664	422	178084	452	204304
393	154449	423	178929	453	205209
394	155236	424	179776	454	206116
395	156025	425	180625	455	207025
396	156816	426	181476	456	207936
397	157609	427	182329	457	208849
398	158404	428	183184	458	209764
399	159201	429	184041	459	210681
400	160000	430	184900	460	211600
401	160801	431	185761	461	212521
402	161604	432	186624	462	213444
403	162409	433	187489	463	214369
404	163216	434	188356	464	215296
405	164025	435	189225	465	216225
406	164836	436	190096	466	217156
407	165649	437	190969	467	218089
408	166464	438	191844	468	219024
409	167281	439	192721	469	219961
410	168100	440	193600	470	220900
411	168921	441	194481	471	221841
412	169744	442	195364	472	222784
413	170569	443	196249	473	223729
414	171396	444	197136	474	224676
415	172225	445	198025	475	225625
416	173056	446	198916	476	226576
417	173889	447	199809	477	227529
418	174724	448	200704	478	228484
419	175561	449	201601	479	229441
420	176400	450	202500	480	230400

E X E M P L U M.

Sint numeri cogitati

I ∞ 2		I. II. & III ∞ 14	} A.
II ∞ 8	Erga summa	II. III & IV ∞ 15	
III ∞ 4		III. IV & I ∞ 9	
IV ∞ 3		IV. I. & II ∞ 13	
		Tripla summa numerorum	} D
		cogitatorum	

Summa cogitatorum ∞ 17

I. II. III. IV ∞ 17.	} S.	I. II. III. IV. ∞ 17.	} S
I. II. III. ∞ 14.		II. III. IV. ∞ 15.	
IV cogitatus ∞ 3.		I. cogitatus ∞ 2.	
I. II. III. IV ∞ 17.	} S.	I. II. III. IV. ∞ 17	} S
I. III. IV. ∞ 9.		I. II. IV. ∞ 13	
II. ∞ 8.		III ∞ 4.	

Qui omnes cum præcedentibus iterum sunt iidem.

Hæc autem resolutionis formâ cum a priori multum differat, etiam aliam inveniendi annuli suppeditat Regulam.

Sed ne nimis prolixi simus, pluribus hujus generis, quæ apud alios abunde reperiuntur, superfedebimus.

Tabula Quadratorum.

465

C A P VI.

Continens Tabulam Quadratorum.

Rad.	Quad.	Rad.	Quad.	Rad.	Quad.
1	1	31	961	61	3721
2	4	32	1024	62	3844
3	9	33	1089	63	3969
4	16	34	1156	64	4096
5	25	35	1225	65	4225
6	36	36	1296	66	4356
7	49	37	1369	67	4489
8	64	38	1444	68	4624
9	81	39	1521	69	4761
10	100	40	1600	70	4900
11	121	41	1681	71	5041
12	144	42	1764	72	5184
13	169	43	1849	73	5329
14	196	44	1936	74	5476
15	225	45	2025	75	5625
16	256	46	2116	76	5776
17	289	47	2209	77	5929
18	324	48	2304	78	6084
19	361	49	2401	79	6241
20	400	50	2500	80	6400
21	441	51	2601	81	6561
22	484	52	2704	82	6724
23	529	53	2809	83	6889
24	576	54	2916	84	7056
25	625	55	3025	85	7225
26	676	56	3136	86	7396
27	729	57	3249	87	7569
28	784	58	3364	88	7744
29	841	59	3481	89	7921
30	900	60	3600	90	8100
				91	8281
				92	8464
				93	8649
				94	8836
				95	9025
				96	9216
				97	9409
				98	9604
				99	9801
				100	10000
				101	10201
				102	10404
				103	10609
				104	10816
				105	11025
				106	11236
				107	11449
				108	11664
				109	11881
				110	12100
				111	12321
				112	12544
				113	12769
				114	12996
				115	13225
				116	13456
				117	13689
				118	13924
				119	14161
				120	14400

<i>Rad.</i>	<i>Quad.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quad.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quad.</i>
121	14641	151	22801	181	32761
122	14884	152	23104	182	33124
123	15129	153	23409	183	33489
124	15376	154	23716	184	33856
125	15625	155	24025	185	34225
126	15876	156	24336	186	34596
127	16129	157	24649	187	34969
128	16384	158	24964	188	35344
129	16641	159	25281	189	35721
130	16900	160	25600	190	36100
131	17161	161	25921	191	36481
132	17424	162	26244	192	36864
133	17689	163	26569	193	37249
134	17956	164	26896	194	37636
135	18225	165	27225	195	38025
136	18496	166	27566	196	38416
137	18769	167	27889	197	38809
138	19044	168	28224	198	39204
139	19321	169	28561	199	39601
140	19600	170	28900	200	40000
141	19881	171	29241	201	40401
142	20164	172	29584	202	40804
143	20449	173	29929	203	41209
144	20736	174	30276	204	41616
145	21025	175	30625	205	42025
146	21316	176	30976	206	42436
147	21609	177	31329	207	42849
148	21904	178	31684	208	43264
149	22201	179	32041	209	43681
150	22500	180	32400	210	44100

Rad. Quad. Rad. Quad. Rad. Quad.

211	44521	241	58081	271	73441
212	44944	242	58564	272	73984
213	45369	243	59049	273	74529
214	45796	244	59536	274	75076
215	46225	245	60025	275	75625
216	46656	246	60516	276	76176
217	47089	247	61009	277	76729
218	47524	248	61504	278	77284
219	47961	249	62001	279	77841
220	48400	250	62500	280	78400
221	48841	251	63001	281	78961
222	49284	252	63504	282	79524
223	49729	253	64009	283	80089
224	50176	254	64516	284	80656
225	50625	255	65025	285	81225
226	51076	256	65536	286	81796
227	51529	257	66049	287	82369
228	51984	258	66564	288	82944
229	52441	259	67081	289	83521
230	52900	260	67600	290	84100
231	53361	261	68121	291	84681
232	53824	262	68644	292	85264
233	54289	263	69169	293	85849
234	54756	264	69696	294	86436
235	55225	265	70225	295	87025
236	55696	266	70756	296	87616
237	56169	267	71289	297	88209
238	56644	268	71824	298	88804
239	57121	269	72361	299	89401
240	57600	270	72900	300	90000

<i>Rad.</i>	<i>Quad.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quad.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quad.</i>
301	90601	331	109561	361	130321
302	91204	332	110224	362	131044
303	91809	333	110889	363	131769
304	92416	334	111556	364	132496
305	93025	335	112225	365	133225
306	93636	336	112896	366	133956
307	94249	337	113569	367	134689
308	94864	338	114244	368	135424
309	95481	339	114921	369	136161
310	96100	340	115600	370	136900
311	96721	341	116281	371	137641
312	97394	342	116964	372	138384
313	97969	343	117649	373	139129
314	98596	344	118336	374	139876
315	99225	345	119025	375	140625
316	99856	346	119716	376	141376
317	100489	347	120409	377	142129
318	101124	348	121104	378	142884
319	101761	349	121801	379	143641
320	102400	350	122500	380	144400
321	103041	351	123201	381	145161
322	103684	352	123904	382	145924
323	104329	353	124609	383	146689
324	104976	354	125316	384	147456
325	105625	355	126025	385	148225
326	106276	356	126736	386	148996
327	106929	357	127449	387	149769
328	107584	358	128164	388	150544
329	108241	359	128881	389	151321
330	108900	360	129600	390	152100

Rad. Quad. Rad. Quad. Rad. Quad.

391	152881	421	177241	451	203401
392	153664	422	178084	452	204304
393	154449	423	178929	453	205209
394	155236	424	179776	454	206116
395	156025	425	180625	455	207025
396	156816	426	181476	456	207936
397	157609	427	182329	457	208849
398	158404	428	183184	458	209564
399	159201	429	184041	459	210681
400	160000	430	184900	460	211600
401	160801	431	185761	461	212521
402	161604	432	186624	462	213444
403	162409	433	187489	463	214369
404	163216	434	188356	464	215296
405	164025	435	189225	465	216225
406	164836	436	190096	466	217156
407	165649	437	190969	467	218089
408	166464	438	191844	468	219024
409	167281	439	192721	469	219961
410	168100	440	193600	470	220900
411	168921	441	194481	471	221841
412	169744	442	195364	472	222784
413	170569	443	196249	473	223729
414	171396	444	197136	474	224676
415	172225	445	198025	475	225625
416	173056	446	198916	476	226576
417	173889	447	199809	477	227529
418	174724	448	200704	478	228484
419	175561	449	201601	479	229441
420	176400	450	202500	480	230400

<i>Rad.</i>	<i>Quad.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quad.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quad.</i>
481	231361	511	261121	541	292681
482	232324	512	262144	542	293764
483	233289	513	263169	543	294849
484	234256	514	264196	544	295936
485	235225	515	265225	545	297025
486	236196	516	266256	546	298116
487	237169	517	267289	547	299209
488	238144	518	268324	548	300304
489	239121	519	269361	549	301401
490	240100	520	270400	550	302500
491	271081	521	271441	551	303601
492	242064	522	272484	552	304704
493	243049	523	273529	553	305809
494	244036	524	274576	554	306916
495	245025	525	275625	555	308025
496	246016	526	276676	556	309136
497	247009	527	277729	557	310249
498	248004	528	278784	558	311364
499	249001	529	279841	559	312481
500	250000	530	280900	560	313600
501	251001	531	281961	561	314721
502	252004	532	283024	562	315844
503	253009	533	284089	563	316969
504	254016	534	285156	564	318096
505	255025	535	286225	565	319225
506	256036	536	287296	566	320356
507	257049	537	288369	567	321489
508	258064	538	289444	568	322624
509	259081	539	290521	569	323761
510	260100	540	291600	570	324900

Rad. Quad. Rad. Quad. Rad. Quad.

571	326041	601	361201	631	398161
572	327184	602	362404	632	399424
573	328329	603	363609	633	400689
574	329476	604	364816	634	401956
575	330625	605	366025	635	403225
576	331776	606	367234	636	404496
577	332929	607	368449	637	405769
578	334084	608	369664	638	407044
579	335241	609	370881	639	408321
580	336400	610	372100	640	409600
581	337561	611	373321	641	410881
582	338724	612	374544	642	412164
583	339889	613	375769	643	413449
584	341056	614	376996	644	414736
585	342225	615	378225	645	416025
586	343396	616	379456	646	417316
587	344569	617	380689	647	418609
588	345744	618	381924	648	419904
589	346921	619	383161	649	421201
590	348100	620	384400	650	422500
591	349281	621	385641	651	423801
592	350464	622	386884	652	425104
593	351649	623	388129	653	426409
594	352836	624	389376	654	427716
595	354025	625	390625	655	429025
596	355216	626	391876	656	430336
597	356409	627	393129	657	431649
598	357604	628	394384	658	432964
599	358801	629	395641	659	434281
600	360000	630	396900	660	435600

<i>Rad.</i>	<i>Quad.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quad.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quad.</i>
661	436921	691	477481	721	519841
662	438244	692	478864	722	521284
663	439569	693	480249	723	522729
664	440896	694	481636	724	524176
665	442225	695	483025	725	525625
666	443556	696	484416	726	527076
667	444889	697	485809	727	528529
668	446224	698	487204	728	529984
669	447561	699	488601	729	531441
670	448900	700	490000	730	532900
671	450241	701	491401	731	534361
672	451584	702	492804	732	535824
673	452929	703	494209	733	537289
674	454276	704	495616	734	538756
675	455625	705	497025	735	540225
676	456976	706	498436	736	541696
677	458329	707	499849	737	543169
678	459684	708	501264	738	544644
679	461041	709	502681	739	546121
680	462400	710	504100	740	547600
681	463761	711	505521	741	549081
682	465124	712	506944	742	550564
683	466489	713	508369	743	552049
684	467856	714	509796	744	553536
685	469225	715	511225	745	555025
686	470596	716	512656	746	556516
687	471969	717	514089	747	558009
688	473344	718	515524	748	559504
689	474721	719	516961	749	561001
690	476100	720	518400	750	562500

Tabula Quadratorum.

473

Rad. Quad. Rad. Quad. Rad. Quad.

751	564001	781	609961	811	657721
752	565504	782	611524	812	659344
753	567009	783	613089	813	660969
754	568516	784	614656	814	662596
755	570025	785	616225	815	664225
756	571536	786	617796	816	665856
757	573049	787	619369	817	667489
758	574564	788	620944	818	669124
759	576081	789	622521	819	670761
760	577600	790	624100	820	672400
761	579121	791	625681	821	674041
762	580644	792	627264	822	675684
763	582169	793	628849	823	677329
764	583696	794	630436	824	678976
765	585225	795	632025	825	680625
766	586756	796	633616	826	682276
767	588289	797	635209	827	683929
768	589824	798	636804	828	685584
769	591361	799	638401	829	687241
770	592900	800	640000	830	688900
771	594441	801	641601	831	690561
772	595984	802	643204	832	692224
773	597529	803	644809	833	693889
774	599076	804	646416	834	695556
775	600625	805	648025	835	697225
776	602176	806	649636	836	698896
777	603729	807	651249	837	700569
778	605284	808	652864	838	702244
779	606841	809	654481	839	703921
780	608400	810	656100	840	705600

<i>Rad.</i>	<i>Quad.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quad.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quad.</i>
841	707281	871	758641	901	811801
842	708964	872	760384	902	813604
843	710649	873	762129	903	815409
844	712336	874	763876	904	817216
845	714025	875	765625	905	819025
846	715716	876	767376	906	820836
847	717409	877	769129	907	822649
848	719104	878	770884	908	824464
849	720801	879	772641	909	826281
850	722500	880	774400	910	828100
851	724201	881	776161	911	829921
852	725904	882	777924	912	831744
853	727609	883	779689	913	833569
854	729316	884	781456	914	835396
855	731025	885	783225	915	837225
856	732736	886	784996	916	839056
857	734449	887	786769	917	840889
858	736164	888	788544	918	842724
859	737881	889	790321	919	844561
860	739600	890	792100	920	846400
861	741321	891	793881	921	848241
862	743044	892	795664	922	850084
863	744769	893	797449	923	851929
864	746496	894	799236	924	853776
865	748225	895	801025	925	855625
866	749956	896	802816	926	857476
867	751689	897	804609	927	859329
868	753424	898	806404	928	861184
869	755161	899	808201	929	863041
870	756900	900	810000	930	864900

Tabula Quadratorum.

475

<i>Rad.</i>	<i>Quad.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quad.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quad.</i>
931	866761	961	923521	991	982081
932	868624	962	925444	992	984064
933	870489	963	927369	993	986049
934	872356	964	929296	994	988036
935	874225	965	931225	995	990025
936	876096	966	933156	996	992016
937	877969	967	935089	997	994009
938	879844	968	937024	998	996004
939	881721	969	938961	999	998001
940	883600	970	940900	1000	1000000
941	885481	971	942841	1001	1002001
942	887364	972	944784	1002	1004004
943	889249	973	946729	1003	1006009
944	891136	974	948676	1004	1008016
945	893025	975	950625	1005	1010025
946	894916	976	952576	1006	1012036
947	896809	977	954529	1007	1014049
948	898704	978	956484	1008	1016064
949	900601	979	958441	1009	1018081
950	902500	980	960400	1010	1020100
951	904401	981	962361	1011	1022121
952	906304	982	964324	1012	1024144
953	908209	983	966289	1013	1026169
954	910116	984	968256	1014	1028196
955	912025	985	970225	1015	1030225
956	913936	986	972196	1016	1032256
957	915849	987	974169	1017	1034289
958	917764	988	976144	1018	1036324
959	919681	989	978121	1019	1038361
960	921600	990	980100	1020	1040400

1021

<i>Rad.</i>	<i>Quadr.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quadr.</i>
1021	1043441	1051	1104601
1022	1044484	1052	1106704
1023	1046529	1053	1108809
1024	1048576	1054	1110916
1025	1050625	1055	1113025
1026	1052676	1056	1115136
1027	1054729	1057	1117249
1028	1056784	1058	1119364
1029	1058841	1059	1121481
1030	1060900	1060	1123600
1031	1062961	1061	1125721
1032	1065024	1062	1127844
1033	1067089	1063	1129969
1034	1069156	1064	1132096
1035	1071225	1065	1134225
1036	1073296	1066	1136356
1037	1075369	1067	1138489
1038	1077444	1068	1140624
1039	1079521	1069	1142761
1040	1081600	1070	1144900
1041	1083681	1071	1147041
1042	1085764	1072	1149184
1043	1087849	1073	1151329
1044	1089936	1074	1153476
1045	1092025	1075	1155625
1046	1094116	1076	1157776
1047	1096209	1077	1159929
1048	1098304	1078	1162084
1049	1100401	1079	1164241
1050	1102500	1080	1166400

Rad.	Quadrat.	Rad.	Quadr.
1081	1168561	1111	1234321
1082	1170724	1112	1236544
1083	1172889	1113	1238769
1084	1175056	1114	1240996
1085	1177225	1115	1243225
1086	1179396	1116	1245456
1087	1181569	1117	1247689
1088	1183744	1118	1249924
1089	1185921	1119	1252161
1090	1188100	1120	1254400
1091	1190281	1121	1256641
1092	1192464	1122	1258884
1093	1194649	1123	1261129
1094	1196836	1124	1263376
1095	1199025	1125	1265625
1096	1201216	1126	1267876
1097	1203409	1127	1270129
1098	1205604	1128	1272384
1099	1207801	1129	1274641
1100	1210000	1130	1276900
1101	1212201	1131	1279161
1102	1214404	1132	1281424
1103	1216609	1133	1283689
1104	1218816	1134	1285956
1105	1221025	1135	1288225
1106	1223236	1136	1290496
1107	1225449	1137	1292769
1108	1227664	1138	1295044
1109	1229881	1139	1297321
1110	1232100	1140	1299600

<i>Rad.</i>	<i>Quadr.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quadr.</i>
1141	1301881	1171	1371241
1142	1304614	1172	1373584
1143	1306449	1173	1375929
1144	1308736	1174	1378276
1145	1311025	1175	1380625
1146	1313316	1176	1382976
1147	1315609	1177	1385329
1148	1317904	1178	1387684
1149	1320201	1179	1390041
1150	1322500	1180	1392400
1151	1324801	1181	1394761
1152	1327104	1182	1397124
1153	1329409	1183	1399489
1154	1331716	1184	1401856
1155	1334025	1185	1404225
1156	1336336	1186	1406596
1157	1338649	1187	1408969
1158	1340964	1188	1411344
1159	1343281	1189	1413721
1160	1345600	1190	1416100
1161	1347921	1191	1418481
1162	1350254	1192	1420864
1163	1352569	1193	1423249
1164	1354896	1194	1425636
1165	1357225	1195	1428025
1166	1359556	1196	1430416
1167	1361889	1197	1432809
1168	1364224	1198	1435204
1169	1366561	1199	1437601
1170	1368900	1200	1440000

<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quadr.</i>
1201	1442401	1231	1515361
1202	1444804	1232	1517824
1203	1447209	1233	1520289
1204	1449616	1234	1522756
1205	1452025	1235	1525225
1206	1454436	1236	1527696
1207	1456849	1237	1530169
1208	1459264	1238	1532644
1209	1461681	1239	1535121
1210	1464100	1240	1537600
1211	1466521	1241	1540081
1212	1468944	1242	1542564
1213	1471369	1243	1545049
1214	1473796	1244	1547536
1215	1476225	1245	1550025
1216	1478656	1246	1552516
1217	1481089	1247	1555009
1218	1483524	1248	1557504
1219	1485961	1249	1560001
1220	1488400	1250	1562500
1221	1490841	1251	1565001
1222	1493284	1252	1567504
1223	1495729	1253	1570009
1224	1498176	1254	1572516
1225	1500625	1255	1575025
1226	1503076	1256	1577536
1227	1505529	1257	1580049
1228	1507984	1258	1582564
1229	1510441	1259	1585081
1230	1512900	1260	1587600

<i>Rad.</i>	<i>Quadr.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quadr.</i>
1261	1590121	1291	1666681
1262	1592644	1292	1669264
1263	1595169	1293	1671849
1264	1597696	1294	1674436
1265	1600225	1295	1677025
1266	1602756	1296	1679616
1267	1605289	1297	1682209
1268	1607824	1298	1684804
1269	1610361	1299	1687401
1270	1612900	1300	1690000
1271	1615441	1301	1692601
1272	1617984	1302	1695204
1273	1620529	1303	1697809
1274	1623076	1304	1700416
1275	1625625	1305	1703025
1276	1628176	1306	1705636
1277	1630729	1307	1708249
1278	1633284	1308	1710864
1279	1635841	1309	1713481
1280	1638400	1310	1716100
1281	1640961	1311	1718721
1282	1643524	1312	1721344
1283	1646089	1313	1723969
1284	1648656	1314	1726596
1285	1651225	1315	1729225
1286	1653796	1316	1731856
1287	1656369	1317	1734489
1288	1658944	1318	1737124
1289	1661521	1319	1739761
1290	1664100	1320	1742400

Tabula Quadratorum.

481

Rad.	Quadrat.	Rad.	Quadr.
13 21	1745041	1351	1825201
13 22	1747684	1352	1827904
13 23	1750329	1353	1830609
13 24	1752976	1354	1833316
13 25	1755625	1355	1836025
13 26	1758276	1356	1838736
13 27	1760929	1357	1841449
13 28	1763584	1358	1844164
13 29	1766241	1359	1846881
13 30	1768900	1360	1849600
13 31	1771561	1361	1852321
13 32	1774224	1362	1855044
13 33	1776889	1363	1857769
13 34	1779556	1364	1860496
13 35	1782225	1365	1863225
13 36	1784896	1366	1865956
13 37	1787569	1367	1868689
13 38	1790244	1368	1871424
13 39	1792921	1369	1874161
13 40	1795600	1370	1876900
13 41	1798281	1371	1879641
13 42	1800964	1372	1882384
13 43	1803649	1373	1885129
13 44	1806336	1374	1887876
13 45	1809025	1375	1890625
13 46	1811716	1376	1893376
13 47	1814409	1377	1896129
13 48	1817104	1378	1898884
13 49	1819801	1379	1901641
13 50	1822500	1380	1904400

H h

1381

<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>
1381	1907161	1411	1990921
1382	1909924	1412	1993744
1383	1912689	1413	1996569
1384	1915456	1414	1999396
1385	1918225	1415	2002225
1386	1920996	1416	2005056
1387	1923769	1417	2007889
1388	1926544	1418	2010724
1389	1929321	1419	2013561
1390	1932100	1420	2016400
1391	1934881	1421	2019241
1392	1937664	1422	2022084
1393	1940449	1423	2024929
1394	1943236	1424	2027776
1395	1946025	1425	2030625
1396	1948816	1426	2033476
1397	1951609	1427	2036329
1398	1954404	1428	2039184
1399	1957201	1429	2042041
1400	1960000	1430	2044900
1401	1962801	1431	2047761
1402	1965604	1432	2050624
1403	1968409	1433	2053489
1404	1971216	1434	2056356
1405	1974025	1435	2059225
1406	1976836	1436	2062096
1407	1979649	1437	2064969
1408	1982464	1438	2067844
1409	1985281	1439	2070721
1410	1988100	1440	2073600

<i>Rad.</i>	<i>Quadr.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quadr.</i>
1441	2076481	1471	2163841
1442	2079364	1472	2166784
1443	2082249	1473	2169729
1444	2085136	1474	2172676
1445	2088025	1475	2175625
1446	2090916	1476	2178576
1447	2093809	1477	2181529
1448	2096704	1478	2184484
1449	2099601	1479	2187441
1450	2102500	1480	2190400
1451	2105401	1481	2193361
1452	2108304	1482	2196324
1453	2111209	1483	2199689
1454	2114116	1484	2202256
1455	2117025	1485	2205225
1456	2119936	1486	2208196
1457	2122849	1487	2211169
1458	2125764	1488	2214144
1459	2128681	1489	2217121
1460	2131600	1490	2220100
1461	2134521	1491	2223081
1462	2137444	1492	2226064
1463	2140369	1493	2229049
1464	2143296	1494	2232036
1465	2146225	1495	2235025
1466	2149156	1496	2238016
1467	2152089	1497	2241009
1468	2155024	1498	2244004
1469	2157961	1499	2247001
1470	2160900	1500	2250000

<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>
1501	2253001	1531	2343961
1502	2256004	1532	2347024
1503	2259009	1533	2350089
1504	2262016	1534	2353156
1505	2265025	1535	2356225
1506	2268036	1536	2359296
1507	2271049	1537	2362369
1508	2274064	1538	2365444
1509	2277081	1539	2368521
1510	2280100	1540	2371600
1511	2283121	1541	2374681
1512	2286144	1542	2377764
1513	2289169	1543	2380849
1514	2292196	1544	2383936
1515	2295225	1545	2387025
1516	2298256	1546	2390116
1517	2301289	1547	2393209
1518	2304324	1548	2396304
1519	2307361	1549	2399401
1520	2310400	1550	2402500
1521	2313441	1551	2405601
1522	2316484	1552	2408704
1523	2319529	1553	2411809
1524	2322576	1554	2414916
1525	2325625	1555	2418025
1526	2328676	1556	2421136
1527	2331729	1557	2424249
1528	2334784	1558	2427364
1529	2337841	1559	2430481
1530	2340900	1560	2433600

Rad.	Quadrat.	Rad.	Quadrat.
1561	2436721	1591	2531281
1562	2439844	1592	2534464
1563	2442969	1593	2537649
1564	2446096	1594	2540836
1565	2449225	1595	2544025
1566	2452356	1596	2547216
1567	2455489	1597	2550409
1568	2458624	1598	2553604
1569	2461761	1599	2556801
1570	2464900	1600	2560000
1571	2468041	1601	2563201
1572	2471184	1602	2566404
1573	2474329	1603	2569609
1574	2477476	1604	2572816
1575	2480625	1605	2576025
1576	2483776	1606	2579236
1577	2486929	1607	2582449
1578	2490084	1608	2585664
1579	2493241	1609	2588881
1580	2496400	1610	2592100
1581	2499561	1611	2595321
1582	2502724	1612	2598544
1583	2505889	1613	2601769
1584	2509056	1614	2604996
1585	2512225	1615	2608225
1586	2515396	1616	2611456
1587	2518569	1617	2614689
1588	2521744	1618	2617924
1589	2524921	1619	2621161
1590	2528100	1620	2624400

<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quadr.</i>
1621	2627641	1651	2725801
1622	2620884	1652	2729104
1623	2634129	1653	2732409
1624	2637376	1654	2635716
1625	2640625	1655	2739025
1626	3643876	1656	2742336
1627	2647129	1657	2745649
1628	2650384	1658	2748964
1629	2653641	1659	2752281
1630	2656900	1660	2755600
1631	2660161	1661	2758921
1632	2663424	1662	2762244
1633	2666689	1663	2765569
1634	2669956	1664	2768896
1635	2673225	1665	2772225
1636	2676496	1666	2775556
1637	2679769	1667	2778889
1638	2683044	1668	2782224
1639	2686321	1669	2785561
1640	2689600	1670	2788900
1641	2692881	1671	2792241
1642	2696164	1672	2795584
1643	2699449	1673	2798929
1644	2702736	1674	2802276
1645	2706025	1675	2805625
1646	2709316	1976	2808976
1647	2712609	1677	2812329
1648	2715904	1678	2815684
1649	2719201	1679	2819041
1650	2722500	1680	2822400
			1681

<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>
1681	2825761	1711	2927521
1682	2829124	1712	2930944
1683	2832489	1713	2934369
1684	2835856	1714	2937796
1685	2839225	1715	2941225
1686	2842596	1716	2944656
1687	2845969	1717	2948089
1688	2849344	1718	2951524
1689	2852721	1719	2954961
1690	2856100	1720	2958400
1691	2859481	1721	2961841
1692	2862864	1722	2965284
1693	2866249	1723	2968729
1694	2869636	1724	2972176
1695	2873025	1725	2975625
1696	2876416	1726	2979076
1697	2879809	1727	2982529
1698	2883204	1728	2985984
1699	2886601	1729	2989441
1700	2890000	1730	2992900
1701	2893401	1731	2996361
1702	2896804	1732	2999824
1703	2900209	1733	3003289
1704	2903616	1734	3006756
1705	2907025	1735	3010225
1706	2910436	1736	3013696
1707	2913849	1737	3017169
1708	2917264	1738	3020644
1709	2920681	1739	3024121
1710	2924100	1740	3027600

<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>
1741	3031081	1771	3136441
1742	3034564	1772	3139984
1743	3038049	1773	3143529
1744	3041536	1774	3147076
1745	3045025	1775	3150625
1746	3048516	1776	3154176
1747	3052009	1777	3157729
1748	3055504	1778	3161284
1749	3059001	1779	3164841
1750	3062500	1780	3168400
1751	3066001	1781	3171961
1752	3069504	1782	3175524
1753	3073009	1783	3179089
1754	3076516	1784	3182656
1755	3080025	1785	3186225
1756	3083536	1786	3189796
1757	3087049	1787	3193369
1758	3090564	1788	3196944
1759	3094081	1789	3200521
1760	3097600	1790	3204100
1761	3101121	1791	3207681
1762	3104644	1792	3211264
1763	3108169	1793	3214849
1764	3111696	1794	3218436
1765	3115225	1795	3222025
1766	3118756	1796	3225616
1767	3122289	1797	3229209
1768	3125824	1798	3232804
1769	3129361	1799	3236401
1770	3132900	1800	3240000

<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>
1801	3243601	1831	3352561
1802	3247204	1832	3356284
1803	3250809	1833	3359849
1804	3254416	1834	3363556
1805	3258025	1835	3367225
1806	3261636	1836	3370896
1807	3265249	1837	3374569
1808	3268864	1838	3378244
1809	3272481	1839	3381921
1810	3276100	1840	3385600
1811	3279721	1841	3389281
1812	3283344	1842	3392964
1813	3286969	1843	3396649
1814	3290596	1844	3400336
1815	3294225	1845	3404025
1816	3297856	1846	3407716
1817	3301489	1847	3411409
1818	3305124	1848	3415104
1819	3308761	1849	3418801
1820	3312400	1850	3422500
1821	3316041	1851	3426201
1822	3319684	1852	3429904
1823	3323329	1853	3433609
1824	3326976	1854	3437316
1825	3330625	1855	3441025
1826	3334276	1856	3444736
1827	3337929	1857	3448449
1828	3341584	1858	3452164
1829	3345241	1859	3455881
1730	3348900	1860	3459600

<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>
1861	346 3321	1891	3 575 881
1862	3467044	1892	3579664
1863	3470769	1893	3583449
1864	3474496	1894	3587236
1865	3478225	1895	3591025
1866	3481956	1896	3594816
1867	3485689	1897	3598609
1868	3489424	1898	3602404
1869	3493161	1899	3606201
1870	3496900	1900	3610000
1871	3500641	1901	3613801
1872	3504384	1902	3617604
1873	3508129	1903	3621409
1874	3511876	1904	3625216
1875	3515625	1905	3629025
1876	3519376	1906	3632836
1877	3523129	1907	3636649
1878	3526884	1908	3640464
1879	3530641	1909	3644281
1880	3534400	1910	3648100
1881	3538161	1911	3651921
1882	3541924	1912	3655744
1883	3545689	1913	3659569
1884	3549456	1914	3663396
1885	3553225	1915	3667225
1886	3556996	1916	3671056
1887	3560769	1917	3674889
1888	3564544	1918	3678724
1889	3568321	1919	3682561
1890	3572100	1920	3686400

Tabula Quadratorum.

491

<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>
1921	3695241	1951	3806401
1922	3964084	1952	3810304
1923	3697929	1953	3814209
1924	3701776	1954	2818116
1925	3705625	1955	3822025
1926	3709476	1956	3825936
1927	3713329	1957	3829849
1928	3717184	1958	3833764
1929	3721041	1959	3837681
1930	3724900	1960	3841600
1931	3728861	1961	3845521
1932	3732624	1962	3849444
1933	3736489	1963	3853369
1934	3740356	1964	3857296
1935	3744225	1965	3861225
1936	3748096	1966	3865156
1937	3751969	1967	3869089
1938	3755844	1968	3873024
1939	3759721	1969	3876961
1940	3763600	1970	3880900
1941	3767481	1971	3884841
1942	3771364	1972	3888784
1943	3775249	1973	3892729
1944	3779136	1974	3896676
1945	3783025	1975	3900625
1946	3786916	1976	3904576
1947	3790809	1977	3908529
1948	3794704	1978	3912484
1949	3798601	1979	3916441
1950	3802500	1980	3920400

1981

<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>
1981	3924361	2011	4044121
1982	3928324	2012	4048144
1983	3932289	2013	4052169
1984	3936256	2014	4056196
1985	3940225	2015	4060225
1986	3944196	2016	4064256
1987	3948169	2017	4068289
1988	3952144	2018	4072324
1989	3956121	2019	4076361
1990	3960100	2020	4080400
1991	3964081	2021	4084441
1992	3968064	2022	4088484
1993	3972049	2023	4092529
1994	3976036	2024	4096576
1995	3980025	2025	4100625
1996	3984016	2026	4104676
1997	3988009	2027	4108729
1998	3992004	2028	4112784
1999	3996001	2029	4116841
2000	4000000	2030	4120900
2001	4004001	2031	4124961
2002	4008004	2032	4129024
2003	4012009	2033	4133089
2004	4016016	2034	4137156
2005	4020025	2035	4141225
2006	4024036	2036	4145296
2007	4028049	2037	4149369
2008	4032064	2038	4153444
2009	4036081	2039	4157521
2110	4040100	2040	4161600

<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>
2041	4165681	2071	4289041
2042	4169764	2072	4293184
2043	4173849	2073	4297329
2044	4177936	2074	4301476
2045	4182025	2075	4305625
2046	4186116	2076	4309776
2047	4190209	2077	4313929
2048	4194304	2078	4318084
2049	4198401	2079	4322241
2050	4202500	2080	4326400
2051	4206601	2081	4330561
2052	4210704	2082	4334724
2053	4214809	2083	4338889
2054	4218916	2084	4343056
2055	4223025	2085	4347225
2056	4227136	2086	4351396
2057	4231249	2087	4355569
2058	4235364	2088	4359744
2059	4239481	2089	4363921
2060	4243600	2090	4368100
2061	4247721	2091	4372281
2062	4251844	2062	4376464
2063	4255969	2093	4380649
2064	4260096	2094	4384836
2065	4264225	2095	4389025
2066	4268356	2096	4393216
2067	4272489	2097	4397409
2068	4276624	2098	4401604
2069	4280761	2099	4405801
2070	4284900	2100	4410000

<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>
2101	4414201	2131	4541161
2102	4418404	2132	4545424
2103	4422609	2133	4549689
2104	4426816	2134	4553956
2105	4431025	2135	4558225
2106	4435236	2136	4562496
2107	4439449	2137	4566769
2108	4443664	2138	4571044
2109	4447881	2139	4575321
2110	4452100	2140	4579600
2111	4456321	2141	4583881
2112	4460544	2142	4588164
2113	4464769	2143	4592449
2114	4468996	2144	4596736
2115	4473225	2145	4601025
2116	4477456	2146	4605316
2117	4481689	2147	4609609
2118	4485924	2148	4613904
2119	4490161	2149	4618201
2120	4494400	2150	4622500
2121	4498641	2151	5626801
2122	4502884	2152	4631104
2123	4507129	2153	4635409
2124	4511376	2154	4639716
2125	4515625	2155	4644025
2126	4519876	2156	4648336
2127	4524129	2157	4652649
2128	4528384	2158	4656964
2129	4532641	2159	4661281
2130	4536900	2160	4665600

<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>
2161	4669921	2191	4800481
2162	4674244	2192	4804864
2163	4678569	2193	4809249
2164	4682896	2194	4813636
2165	4687225	2195	4818025
2166	4691556	2196	4822416
2167	4695889	2197	4826809
2168	4700224	2198	4831204
2169	4704561	2199	4835601
2170	4708900	2200	4840000
2171	4713241	2201	4844401
2172	4717584	2202	4848804
2173	4721929	2203	4853209
2174	4726276	2204	4857616
2175	4730625	2205	4862025
2176	4734976	2206	4866436
2177	4739329	2207	4870849
2178	4743684	2208	4875264
2179	4748041	2209	4879681
2180	4752400	2210	4884100
2181	4756761	2211	4888521
2182	4761124	2212	4892944
2183	4765489	2213	4897369
2184	4769856	2214	4901796
2185	4774225	2215	4906225
2186	4778596	2216	4910656
2187	4782969	2217	4915089
2188	4787344	2218	4919524
2189	4791721	2219	4923961
2190	4796100	2220	4928400

<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>
2221	4932841	2251	5057001
2222	4937284	2252	5071504
2223	4941729	2253	5076009
2224	4946176	2254	5080516
2225	4950625	2255	5085025
2226	4955076	7256	5089536
2227	4959529	2257	5094049
2228	4963984	2258	5098564
2229	4968441	2259	5103081
2230	4972900	3360	5107600
2231	4977361	2261	5112121
2232	4981824	2262	5116644
2233	4986289	2263	5121169
2234	4990756	2264	5125696
2235	4995225	2265	5130225
2236	4999696	2266	5134756
2237	5004169	2267	5139289
2238	5008644	2268	5143824
2239	5013121	2269	5148361
2240	5017600	2270	5152900
2241	5022081	2271	5157441
2242	5026564	2272	5161984
2243	5031049	2273	5166529
2244	5035536	2274	5171076
2245	5040025	2275	5175625
2246	5044516	2276	5180176
2247	5049009	2277	5184729
2248	5053504	2278	5189284
2249	5058001	2279	5193841
2250	5062500	2280	5198400

<i>Rad.</i>	<i>Quadr.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quadr.</i>
228 1	5202961	231 1	5340721
228 2	5207524	231 2	5345344
228 3	5212089	231 3	5349969
228 4	5216656	231 4	5354596
228 5	5221225	231 5	5359225
228 6	5225796	231 6	5363856
228 7	5230369	231 7	5368489
228 8	5234944	231 8	5373124
228 9	5239521	231 9	5377761
229 0	5244100	232 0	5382400
229 1	5248681	232 1	5387041
229 2	5253264	232 2	5391684
229 3	5257849	232 3	5396329
229 4	5262436	232 4	5400976
229 5	5267025	232 5	5405625
229 6	5271616	232 6	5410276
229 7	5276209	232 7	5414929
229 8	5280804	232 8	5419584
229 9	5285401	232 9	5424241
230 0	5290000	233 0	5428900
230 1	5294601	233 1	5433561
230 2	5299204	233 2	5438224
230 3	5303809	233 3	5442889
230 4	5308416	233 4	5447556
230 5	5313025	233 5	5452225
230 6	5317636	233 6	5456896
230 7	5322249	233 7	5461569
230 8	5326864	233 8	5466244
230 9	5331481	233 9	5470921
231 0	5336100	234 0	5475600
		I i	2401

<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>
2461	6056521	2491	6205081
2462	6061444	2492	6210064
2463	6066369	2493	6215049
2464	6071296	2494	6220036
2465	6076225	2495	6225025
2466	6081156	2496	6230016
2467	6086089	2497	6235009
2468	6091024	2498	6240004
2469	6095961	2499	6245001
2470	6100900	2500	6250000
2471	6105841	2501	6255001
2472	6110784	2502	6260004
2473	6115729	2503	6265009
2474	6120676	2504	6270016
2475	6125625	2505	6275025
2476	6130576	2506	6280036
2477	6135529	2507	6285049
2478	6140484	2508	6290064
2479	6145441	2509	6295081
2480	6150400	2510	6300100
2481	6155361	2511	6305121
2482	6160324	2512	6310144
2483	6165289	2513	6315169
2484	6170256	2514	6320196
2485	6175225	2515	6325225
2486	6180196	2516	6330256
2487	6185169	2517	6335289
2488	6190144	2518	6340324
2489	6195121	2519	6345391
2490	6200100	2520	6350400

<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>
2521	6355441	2551	6507601
2522	6360484	2552	6512704
2523	6365529	2553	6517809
2524	6370576	2554	6522916
2525	6375625	2555	6528025
2526	6380676	2556	6533136
2527	6385729	2557	6538249
2528	6390784	2558	6543264
2529	6395841	2559	6548481
2530	6400900	2560	6553600
2531	6405961	2561	6558721
2532	6411024	2562	6563844
2533	6416089	2563	6568969
2534	6421156	2564	6574096
2535	6426225	2565	6579225
2536	6431296	2566	6584356
2537	6436369	2567	6589489
2538	6441444	2568	6594624
2539	6446521	2569	6599761
2540	6451600	2570	6604900
2541	6456681	2571	6610041
2542	6461764	2572	6615184
2543	6466849	2573	6620329
2544	6471936	2574	6625476
2545	6477025	2575	6630625
2546	6482116	2576	6635776
2547	6487209	2577	6640929
2548	6492304	2578	6646084
2549	6497401	2579	6651241
2550	6502500	2580	6656400

<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>
2581	6661561	2611	6817321
2582	6666724	2612	6822544
2583	6671889	2613	6827769
2584	6677056	2614	6832996
2585	6682225	2615	6838225
2586	6687396	2616	6843456
2587	6692569	2617	6848689
2588	6697744	2618	6853924
2589	6702921	2619	6859161
2590	6708100	2620	6864400
2591	6713281	2621	6869641
2592	6718464	2622	6874884
2593	6723649	2623	6880129
2594	6728836	2624	6885376
2595	6734025	2625	6890625
2596	6739216	2626	6895876
2597	6744409	2627	6901129
2598	6749604	2628	6906384
2599	6754801	2629	6911641
2600	6760000	2630	6916900
2601	6765201	2631	6922161
2602	6770404	2632	6927424
2603	6775609	2633	6932689
2604	6780816	2634	6937956
2605	6786026	2635	6943225
2606	6791235	2636	6948469
2607	6796449	2637	6953796
2608	6801664	2638	6959044
2609	6806881	2639	6964321
2610	6812100	2640	6969600

Rad.	Quadrat.	Rad.	Quadrat.
2641	6974881	2671	7134241
2642	6980164	2672	7139584
2643	6985449	2673	7144929
2644	6990736	2674	7150276
2645	6996025	2675	7155625
2646	7001316	2676	7160976
2647	7006609	6277	7166329
2648	7011904	6178	7171684
2649	7017201	2679	7177041
2650	7022500	2680	7182400
2651	7027801	2681	7187761
2652	7033104	2682	7193124
2653	7038409	2683	7198489
2654	7043716	2684	7203856
2655	7049025	2685	7209225
2656	7054336	2686	7214596
2657	7059649	2687	7219969
2658	7064964	2688	7225344
2659	7070281	2689	7230721
2660	7075600	2690	7236100
2661	7080921	2691	7241481
2662	7086244	2692	7246864
2663	7091569	2693	7252249
2664	7096896	2694	7257636
2665	7102225	2695	7263025
2666	7107556	2696	7268416
2667	7112889	2697	7273809
2668	7118224	2698	7279204
2669	7123561	2699	7284601
2670	7128900	2700	7290000

<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>
2701	7295401	2731	7458361
2702	7300804	2732	7463824
2703	7306209	2733	7469289
2704	7311616	2734	7474756
2705	7317025	2735	7480225
2706	7322436	2736	7485696
2707	7327849	2737	7491169
2708	7333264	2738	7496644
2709	7338681	2739	7502121
2710	7344100	2740	7507600
2711	7349521	2741	7513081
2712	7354944	2742	7518564
2713	7360369	2743	7524049
2714	7365796	2744	7529536
2715	7371225	2745	7535025
2716	7376656	2746	7540516
2717	7382089	2747	7546009
2718	7387524	2748	7551504
2719	7392961	2749	7557001
2720	7398400	2750	7562500
2721	7403841	2751	7568001
2722	7409284	2752	7573504
2723	7414729	2753	7579009
2724	7420176	2754	7584516
2725	7425625	2755	7590025
2726	7431076	2756	7595536
2727	7436529	2757	7601049
2728	7441984	2758	7606564
2729	7447441	2759	7612081
2730	7452900	2760	7617600

<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>
2761	7623121	2791	7789681
2762	7628644	2792	7795264
2763	7634169	2793	7800849
2764	7639696	2794	7806436
2765	7645225	2795	7812025
2766	7650756	2796	7817616
2767	7656289	2797	7823209
2768	7661824	2798	7828804
2769	7667361	2799	7834401
2770	7672900	2800	7840000
2771	7678441	2801	7845601
2772	7683984	2802	7851204
2773	7689529	2803	7856809
2774	7695076	2804	7862416
2775	7700625	2805	7868025
2776	7706176	2806	7873636
2777	7711729	2807	7879249
2778	7717284	2808	7884864
2779	7722841	2809	7890481
2780	7728400	2810	7896100
2781	7733961	2811	7901721
2782	7739524	2812	7907344
2783	7745089	2813	7912969
2784	7750656	2814	7918596
2785	7756225	2815	7924225
2786	7761796	2816	7929856
2787	7767369	2817	7935489
2788	7772944	2818	7941124
2789	7778521	2819	7946761
2790	7784100	2820	7952400

<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>
2821	7958041	2851	81282 01
2822	7963684	2852	81339 04
2823	79693 29	2853	81396 09
2824	7974976	2854	81453 16
2825	7980625	2855	81510 25
2826	79862 76	2856	81567 36
2827	7991 929	2857	8162449
2828	7997584	2858	81681 64
2829	8003241	2859	8173881
2830	8008900	2860	8179600
2831	8014561	2861	81853 21
2832	80202 24	2862	81910 44
2833	8025889	2863	8196769
2834	80315 56	2864	82024 96
2835	80372 25	2865	8208225
2836	8042896	2866	82139 56
2837	8048569	2867	8219689
2838	8054244	2868	8225424
2839	80599 21	2869	82311 61
2840	8065600	2870	82369 00
2841	8071 281	2871	82426 41
2842	8076964	2872	82483 84
2843	8082649	2873	82541 29
2844	80883 36	2874	82598 76
2745	8094025	2875	82656 25
2846	8099716	2876	8271376
2847	8105409	2877	8277129
2848	8111104	2878	8282884
2849	81168 01	2879	82886 41
2850	81225 00	2880	8294400

<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>
2881	8300 161	2911	84739 21
2882	83059 24	2912	84797 44
2883	83116 89	2913	84855 69
2884	83174 56	2914	84913 97
2885	83232 25	2915	84972 25
2886	83289 56	2916	85030 56
2887	83347 69	2917	85088 89
2888	83405 44	2918	85147 24
2889	83463 21	2919	85205 61
2890	83521 00	2920	85264 00
2891	83578 81	2921	85322 41
2892	83636 64	2922	85380 84
2893	83694 49	2923	85439 29
2894	83752 36	2924	85497 76
2895	83810 25	2925	85556 25
2896	83868 16	2926	85614 76
2897	83926 09	2927	85673 29
2898	83984 04	2928	85731 84
2899	84042 01	2929	85790 41
2900	84100 00	2930	85849 00
2901	84158 01	2931	85907 61
2902	84216 04	2932	85966 24
2903	84274 09	2933	86024 89
2904	84332 16	2934	86083 56
2905	84390 25	2935	86142 25
2906	84448 36	2936	86200 96
2907	84506 49	2937	86259 69
2908	84564 64	2938	86318 44
2909	84622 81	2939	86377 21
2910	84681 00	2940	86436 00

<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Quadrat.</i>
2941	8649481	2971	8826841
2942	8655364	2972	8832784
2943	8661249	2973	8838629
2944	8667136	2974	8844676
2945	8673025	2975	8850625
2946	8678916	2976	8856576
2947	8684809	2977	8862529
2948	8690704	2978	8868484
2949	8696601	2979	8874441
2950	8702500	2980	8880400
2951	8708401	2981	8886361
2952	8714304	2982	8892324
2953	8720209	2983	8898289
2954	8726116	2984	8904256
2955	8732025	2985	8910225
2956	8737936	2986	8916196
2957	8743849	2987	8922169
2958	8749764	2988	8928144
2959	8755681	2989	8934121
2960	8761600	2990	8940100
2961	8767521	2991	8946081
2962	8773444	2992	8952054
2963	8779369	2993	8958029
2964	8785296	2994	8964036
2965	8791225	2995	8970025
2966	8797156	2996	8976016
2967	8803089	2997	8982009
2968	8809024	2998	8988004
2969	8814961	2999	8994001
2970	8820900	3000	9000000

Tabula Cuborum.

509

C A P. VII.

Tabula Cuborum.

<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>
1	1	31	29791	61	226981
2	8	32	32768	62	238328
3	27	33	35937	63	250047
4	64	34	39304	64	262144
5	125	35	42875	65	274625
6	216	36	46656	66	287496
7	343	37	50653	67	300763
8	512	38	54872	68	314432
9	729	39	59319	69	328509
10	1000	40	64000	70	343000
11	1331	41	68921	71	357911
12	1728	42	74088	72	373248
13	2197	43	79507	73	389017
14	2744	44	85184	74	405224
15	3375	45	91125	75	421875
16	4096	46	97336	76	438976
17	4913	47	103823	77	456533
18	5832	48	110592	78	474552
19	6859	49	117649	79	493039
20	8000	50	125000	80	512000
21	9261	51	132651	81	531441
22	10648	52	140608	82	551368
23	12167	53	148877	83	571787
24	13824	54	157464	84	592704
25	15625	55	166375	85	614125
26	17576	56	175616	86	636056
27	19683	57	185193	87	658503
28	21952	58	195112	88	681472
29	24389	59	205379	89	704969
30	27000	60	216000	90	729000

<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>
91	753571	121	1771561
92	778688	122	1815848
93	804357	123	1860867
94	830584	124	1906624
95	857395	125	1953125
96	884736	126	2000376
97	912673	127	2048383
98	941192	128	2097152
99	970299	129	2146689
100	1000000	130	2197000
101	1030301	131	2248091
102	1061208	132	2299968
103	1092727	133	2352637
104	1124864	134	2406104
105	1157625	135	2460375
106	1191016	136	2515456
107	1225043	137	2571353
108	1259712	138	2628072
109	1295029	139	2685619
110	1331000	140	2744000
111	1367631	141	2803221
112	1404928	142	2863288
113	1442897	143	2924207
114	1481544	144	2985984
115	1520875	145	3048625
116	1560896	146	3112136
117	1601613	147	3176523
118	1643032	148	3241792
119	1685159	149	3307949
120	1728000	150	3375000

Tabula Quadratorum.

511

<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>
151	3442951	181	5929741
152	3511808	182	6028568
153	3581577	183	6128487
154	3652264	184	6229504
155	3723875	185	6331625
156	3796416	189	6434856
157	3869893	187	6539203
158	3944312	188	6644672
159	4019679	189	6751269
160	4096000	190	6859000
161	4173281	191	6967871
162	4251528	192	7077888
163	4330747	193	7189057
164	4410944	194	7301384
165	4492125	195	7414875
166	4574296	196	7529536
167	4657463	197	7645373
168	4741632	198	7762392
169	4826809	199	7880599
170	4913000	200	8000000
171	5000211	201	8120601
172	5088448	202	8242408
173	5177717	203	8365427
174	5268024	204	8489664
175	5359375	205	8615125
176	5451776	206	8741616
177	5545233	207	8859743
178	5639752	208	8998912
179	5735339	209	9129329
180	5832000	210	9261000

<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>
211	9393931	241	13997521
212	9528128	242	14172488
213	9663597	243	14348907
214	9800344	244	14526784
215	9938375	245	14706125
216	10077696	246	14886936
217	10218313	247	15069223
218	10360232	248	15252992
219	10503459	249	15438249
220	10648000	250	15625000
221	10793861	251	15813251
222	10941048	252	16003008
223	11089567	253	16194277
224	11239424	254	16387064
225	11390625	255	16581375
226	11543176	256	16777216
227	11697083	257	16974593
228	11852352	258	17173512
229	12008989	259	17373979
230	12167000	260	17576000
231	12326391	261	17779581
232	12487168	262	17984728
233	12649337	263	18191447
234	12812904	264	18399744
235	12977875	265	18609625
236	13144256	266	18821096
237	13312053	267	19034163
238	13481272	268	19248832
239	13651919	269	19465109
240	13824000	270	19683000

Rad.	Cub.	Rad.	Cub.
271	19902511	301	27270901
272	20123948	302	27543608
273	20346417	303	27818127
274	20570824	304	28094464
275	20796875	305	28372625
276	21024576	306	28652616
277	21253933	307	28934443
278	21484952	308	29218112
279	21717639	309	29503629
280	21952000	310	29791000
281	22188041	311	30080231
282	22425768	312	30371328
283	22665187	313	30664297
284	22906304	314	30959144
285	23149125	315	31255875
286	23393656	316	31554496
287	23639903	317	31855013
288	23887872	318	32157432
289	24137569	319	32461759
290	24389000	320	32768000
291	24642171	321	33076161
292	24897088	322	33386248
293	25153757	323	33698267
294	25412184	324	34012224
295	25672375	325	34328125
296	25934336	326	34645976
297	26198073	327	34965783
298	26463592	328	35287552
299	26730899	329	35611289
300	27000000	330	35937000

<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>
331	3626469 1	361	47045881
332	36594368	362	47437928
333	36926037	363	47832147
334	37259704	364	48228544
335	37595375	365	48627125
336	37933056	366	49027896
337	38272753	367	49430863
338	38614472	368	49836032
339	38958219	369	50243409
340	39304000	370	50653000
341	39651821	371	51064811
342	40001688	372	51478848
343	40353607	373	51895117
344	40707584	374	52323624
345	41063625	375	52734375
346	41421736	376	53157376
347	41781923	377	53582633
348	42144192	378	54010152
349	42508549	379	54439939
350	42875000	380	54872000
351	43243551	381	55306341
352	43614208	382	55742968
353	43986977	383	56181887
354	44361864	384	56623104
355	44738875	385	57066625
356	45118016	386	57512456
357	45499293	387	57960603
358	45882712	388	58411072
359	46268279	389	58863869
360	46656000	390	59319000

Tabula Cuborum.

515

<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>
391	59776471	421	74618461
392	60236288	422	75151448
393	60698457	423	75686967
394	61162984	424	76225024
395	61629875	425	76765625
396	62099136	426	77308776
397	62570773	427	77854483
398	63044792	428	78402752
399	63521199	429	78953589
400	64000000	430	79507000
401	64481201	431	80062991
402	64964808	432	80621568
403	65450827	433	81182737
404	65939264	434	81746504
405	66430125	435	82312875
406	66923416	436	82881856
407	67419143	437	83453453
408	67917312	438	84027672
409	68417929	439	84604519
410	68921000	440	85184000
411	69426531	441	85766121
412	69934528	442	86350888
413	70444997	443	86938307
414	70907944	444	87528384
415	71473375	445	88121125
416	71991296	446	88716536
417	72511713	447	89314623
418	73034632	448	89915392
419	73560059	449	90518849
420	74088000	450	91125000

Kk 2

451

<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>
45 1	9173 38 51	48 1	111284641
45 2	92345 40 8	48 2	111980168
45 3	929596 77	48 3	1126786 87
45 4	93576 664	48 4	1133799 04
45 5	941963 75	48 5	1140841 25
45 6	94818 816	48 6	1147912 56
45 7	954439 93	48 7	1155013 03
45 8	96071 912	48 8	1162142 72
45 9	967025 79	48 9	1169301 69
46 0	97336 000	49 0	117649 000
46 1	9797 21 81	49 1	1183707 71
46 2	98611 128	49 2	1190954 88
46 3	992528 47	49 3	1198231 57
46 4	998973 44	49 4	1205537 84
46 5	1005446 25	49 5	1212873 75
46 6	1011949 69	49 6	1220239 36
46 7	1018475 63	49 7	1227634 73
46 8	1025032 32	49 8	1235059 92
46 9	1031617 09	49 9	1242514 99
47 0	1038230 00	50 0	1250000 00
47 1	1044871 11	50 1	1257515 01
47 2	1051540 48	50 2	1265060 08
47 3	1058238 17	50 3	1272635 27
47 4	1064964 24	50 4	1280240 64
47 5	1071718 75	50 5	128787 625
47 6	1078501 76	50 6	1295542 16
47 7	1085313 33	50 7	1303238 43
47 8	10921 53 52	50 8	131096 512
47 9	1099022 39	50 9	1318722 29
48 0	1105920 00	51 0	1326510 00

<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>
5 1 1	133432 831	5 4 1	158340421
5 1 2	1342177 28	5 4 2	1592200 88
5 1 3	135005 697	5 4 3	160103007
5 1 4	135796744	5 4 4	160989184
5 1 5	136590875	5 4 5	161878625
5 1 6	137388096	5 4 6	162771336
5 1 7	138188413	5 4 7	163667323
5 1 8	138991832	5 4 8	164566592
5 1 9	139798359	5 4 9	165469149
5 2 0	140608000	5 5 0	166375000
5 2 1	141420761	5 5 1	167284151
5 2 2	142236648	5 5 2	168196608
5 2 3	143055667	5 5 3	169112377
5 2 4	143877824	5 5 4	170031464
5 2 5	144703125	5 5 5	170953875
5 2 6	145531576	5 5 6	171879616
5 2 7	146363183	5 5 7	172808693
5 2 8	147197952	5 5 8	173741112
5 2 9	148035889	5 5 9	174676879
5 3 0	148877000	5 6 0	175616000
5 3 1	149721291	5 6 1	176558481
5 3 2	150568768	5 6 2	177504328
5 3 3	151419437	5 6 3	178453547
5 3 4	152273304	5 6 4	179406144
5 3 5	153130375	5 6 5	180362125
5 3 6	153990656	5 6 6	181321496
5 3 7	154854153	5 6 7	182284263
5 3 8	155720872	5 6 8	183250432
5 3 9	156590819	5 6 9	184220009
5 4 0	157464000	5 7 0	185103000

<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>
571	186169411	601	217081801
572	187149248	602	218167208
573	188132517	603	219256227
574	189119224	604	220348864
575	190109375	605	221445125
576	191102976	606	222545016
577	192100033	607	223648543
578	193200552	608	224755712
579	194104539	609	225866529
580	195112000	610	226981000
581	196122941	611	228099131
582	197137368	612	229220928
583	198155287	613	230346397
584	199176704	614	231475544
585	200201625	615	232608375
586	201230056	616	233744896
587	202262003	617	234885113
588	203297472	618	236029032
589	204336469	619	237176659
590	205379000	620	238328000
591	206425071	621	239483061
592	207474688	622	240641848
593	208527857	623	241804367
594	209584584	624	242970624
595	210644875	625	244140625
596	211708736	626	245314376
597	212776173	627	246491883
598	213847192	628	247673152
599	214921799	629	248858189
600	216000000	630	250047000

Rad.	Cub.	Rad.	Cub.
631	251239591	661	288804781
632	252435968	662	290117528
633	253636137	663	291434247
634	254840104	664	292754944
635	256047875	665	294079625
636	257259456	666	295408296
637	258474853	667	296740963
638	259694072	668	298077632
639	260917119	669	299418309
640	262144000	670	300763000
641	263374721	671	302111711
642	264609288	672	303464448
643	265847707	673	304821217
644	267089984	674	306182024
645	268336125	675	307546875
646	269586136	676	308915776
647	270840023	677	310288733
648	272097792	678	311667552
649	273359449	679	313046839
650	274625000	680	314432000
651	275894451	681	315821421
652	277167808	682	317214568
653	278445077	683	318611987
654	279726264	684	320013504
655	281011375	685	321419125
656	282300416	686	322828856
657	283594393	687	324242703
658	284890312	688	325660672
659	286191179	689	327082769
660	287496000	690	328509000

Rad. Cub. Rad. Cub. Rad. Cub.

691	329939371	721	374805361	751	423564751
692	331373888	722	376367048	752	425259008
693	332812557	723	377933067	753	426957777
694	334255384	724	379503324	754	428661064
695	335702375	725	381078125	755	430368875
696	337163536	726	382657176	756	432081216
697	338608873	727	384240583	757	433798093
698	340068392	728	385828352	758	435519512
699	341532099	729	387420489	759	437245479
700	343000000	730	389017000	760	438976000
701	344472101	731	390617891	761	440711081
702	345948408	732	392223168	762	442450728
703	347428927	733	393832837	763	444194947
704	348913664	734	395446904	764	445943744
705	350402625	735	397065375	765	447697125
706	351895816	736	398688256	766	449455096
707	353393243	737	400315553	767	451217663
708	354894812	738	401947272	768	452984832
709	356400829	739	403583419	769	454756609
710	357911000	740	405224000	770	456533000
711	359425431	741	406869021	771	458314011
712	360944128	742	408518488	772	460099648
713	362467097	743	410172407	773	461889817
714	363994344	744	411830784	774	463684824
715	365525875	745	413593625	775	465484375
716	367061696	746	415160936	776	467288576
717	368601813	747	416832723	777	469097433
718	370146232	748	418508992	778	470910952
719	371694959	749	420189749	779	472729139
720	373248000	750	421875000	780	474552000

Rad.	Cub.	Rad.	Cub.
781	476379541	811	533411731
782	478211768	812	535387328
783	480048687	813	537367797
784	481890304	814	539353144
785	483736625	815	541343375
786	485587656	816	543338496
787	487443403	817	545338513
788	489303872	818	547343432
789	491169069	819	549353259
790	493039000	820	551368000
791	494913671	821	553387661
792	496793088	822	555412248
793	498677257	823	557441767
794	500566184	824	559476224
795	502459875	825	561515625
796	504358336	826	563559976
797	506261573	827	565609283
798	508169592	828	567663552
799	510082399	829	569722789
800	512000000	830	571787000
801	513922401	831	573856191
802	515849608	832	575930368
803	517781627	833	578000937
804	519718464	834	580093704
805	522660125	835	582182875
806	523606616	836	584277056
807	525557943	837	586376253
808	527514112	838	588480472
809	529475129	839	590589719
810	531441000	840	592704000

<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>
841	594823321	871	660776311
842	596947688	872	663054848
843	599077107	873	665338617
844	601211584	874	667627624
845	603351125	875	669921875
849	605495736	876	672221376
847	607645423	877	674526133
848	609800192	878	676836152
849	611960049	879	679151439
850	614125000	880	681472000
851	616295051	881	683797841
852	618470208	882	686128968
853	620650477	883	688465387
854	622835864	884	690807104
855	625026375	885	693154125
856	627222016	886	695506456
857	629422793	887	697864103
858	631628712	888	700227072
859	633829779	889	702595369
860	636056000	890	704965000
861	638277381	891	707347971
862	640503928	892	709732288
863	642735647	893	712121957
864	644972544	894	714516984
865	647214625	895	716917375
866	649461896	896	719323136
867	651714363	897	721734273
868	653972032	898	724150792
869	656234909	899	726572699
870	658503000	900	729000000

<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>	<i>• Rad.</i>	<i>Cub.</i>
901	731432701	931	806954491
902	733870808	932	809557568
903	736314327	933	812166237
904	738763264	934	814780504
905	741217625	935	817400375
906	743677416	936	820025856
907	746142643	937	822656953
908	748613312	938	825292672
909	751089429	939	827936019
910	753571000	940	830584000
911	756058031	941	833237621
912	758550528	942	835896888
913	761048497	943	838561807
914	763551944	944	841232384
915	766060875	945	843908625
916	768575296	946	846590536
917	771095213	947	849278123
918	773620532	948	851971392
919	776151559	949	854670349
920	778688000	950	857375000
921	781229961	951	860085315
922	783777448	952	862801408
923	786330467	953	865523177
924	788889024	954	868250664
925	791453125	955	870983875
926	794022776	956	873722816
927	796597983	957	876467493
928	799178752	958	879217912
929	801765089	959	881974079
930	804357000	960	884736000

<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>
961	887503681	991	973242271
962	890277128	992	976191488
963	893056347	993	979146557
964	895841344	994	982107784
965	898632125	995	985074875
966	901428696	996	988047936
967	904231063	997	991026973
968	907039232	998	994011992
969	909853209	999	997002999
970	912673000	1000	1000000000
971	915498611	1001	1003003001
972	918330048	1002	1006012008
973	921167317	1003	1009027027
974	924010424	1004	1012048064
975	926859375	1005	1015075125
976	929714176	1006	1018108216
977	932574833	1007	1021147343
978	935441352	1008	1024192512
979	938313739	1009	1027243729
980	941192000	1010	1030301000
981	944076141	1011	1033364331
982	946966168	1012	1036433728
983	949862087	1013	1039509197
984	952763904	1014	1042590744
985	955671625	1015	1045678375
986	958585256	1016	1048772096
987	961504803	1017	1051871913
988	964430272	1018	1054977832
989	967361669	1019	1058089859
990	970299000	1020	1061208000

<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>
1021	1064332261	1051	1160935651
1022	1067462648	1052	1164252608
1023	1070599167	1053	1167575877
1024	1073741824	1054	1170905464
1025	1076890625	1055	1174241375
1026	1080045576	1056	1177583616
1027	1083206683	1057	1180932193
1028	1086373952	1058	1184287112
1029	1089547389	1059	1187648379
1030	1092727000	1060	1191016000
1031	1095912791	1061	1194389981
1032	1099104768	1062	1197770328
1033	1102302937	1063	1201157047
1034	1105507204	1064	1204550144
1035	1108717875	1065	1207959625
1036	1111934656	1066	1211355496
1037	1115157653	1067	1214767763
1038	1118386872	1068	1218186432
1039	1121622319	1069	1221611509
1040	1124864000	1070	1225043000
1041	1128111921	1071	1228480911
1042	1131366088	1072	1231925248
1043	1134626597	1073	1235376017
1044	1137893184	1074	1238833224
1045	1141166125	1075	1242296875
1046	1144445336	1076	1245766976
1047	1147730823	1077	1249243533
1048	1151022592	1078	1252726552
1049	1154320649	1079	1256216039
1050	1157625060	1080	1259712000

<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>
1081	1263214441	1111	1371330631
1082	1266723368	1112	1375036928
1083	1270238787	1112	1378749897
1084	1273760704	1114	1382469544
1085	1277289125	1115	1386195875
1086	1280824056	1116	1389928896
1087	1284365503	1117	1393668613
1088	1287913472	1118	1497415032
1089	1291467969	1119	1401168159
1090	1295029000	1120	1404928000
1091	1298596571	1121	1408694561
1092	1302170688	1122	1412467848
1093	1305751357	1123	1416247867
1094	1309338584	1124	1420034624
1095	1312932375	1125	1423828125
1096	1316532736	1126	1427628376
1097	1320139673	1127	1431435383
1098	1323753192	1128	1435249152
1099	1327373299	1129	1439069689
1100	1331000000	1130	1442897000
1101	1334633301	1131	1446731091
1102	1338273208	1132	1450571968
1103	1341919727	1133	1454419637
1104	1345572864	1134	1458274104
1105	1349232625	1135	1462135375
1106	1352899016	1136	1466003456
1107	1356572043	1137	1469878353
1108	1360251712	1138	1473760072
1109	1363938029	1139	1477648619
1110	1367631000	1140	1481544000

<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>
1141	1485446221	1171	1605723211
1142	1489355288	1172	1609840448
1143	1493271207	1173	1613964717
1144	1497193984	1174	1618096024
1145	1501123625	1175	1622234375
1146	1505060136	1176	1626379776
1147	1509003523	1177	1930532233
1148	1512953792	1178	1634691752
1149	1516910949	1179	1638858339
1150	1520875000	1180	1643032000
1151	1524845951	1181	1647212741
1152	1528823808	1182	1651400568
1153	1532808577	1183	1655595487
1154	1536800264	1184	1659797504
1155	1540798875	1185	1664006625
1156	1544804416	1186	1668222856
1157	1548816893	1187	1672446203
1158	1552836312	1188	1676676672
1159	1556862679	1189	1680914269
1160	1560896000	1190	1685159000
1161	1564936281	1191	1689410871
1162	1568983528	1192	1693669888
1163	1573037747	1193	1697936057
1164	1577098944	1194	1702209384
1165	1581167125	1195	1706489875
1166	1585242296	1196	1710777536
1167	1589324463	1197	1715072373
1168	1593413632	1198	1719374392
1169	1597509809	1199	1723683599
1170	1601613000	1200	1728000000

<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>
1201	1732323601	1231	1865409391
1202	1736654408	1232	1869959168
1203	1740992427	1233	1874516337
1204	1745337664	1234	1879080904
1205	1749690125	1235	1883652875
1206	1754049816	1236	1888232256
1207	1758416743	1237	1892819053
1208	1762790912	1238	1897413272
1209	1767172329	1239	1902014919
1210	1771561000	1240	1906624000
1211	1775956931	1241	1911240521
1212	1780360128	1242	1915864488
1213	1784770597	1243	1920495907
1214	1789188344	1244	1925134784
1215	1793613375	1245	1929781125
1216	1798045696	1246	1934434936
1217	1802485313	1247	1939096223
1218	1806932232	1248	1943764992
1219	1811386459	1249	1948441249
1220	1815848000	1250	1953125000
1221	1820316861	1251	1957816251
1222	1824793048	1252	1962515008
1223	1829276567	1253	1967221277
1224	1833767424	1254	1971935064
1225	1838265625	1255	1976656375
1226	1842771176	1256	1981385216
1227	1847284083	1257	1986121593
1228	1851804352	1258	1990865512
1229	1856331989	1259	1995616979
1230	1860867000	1260	2000376000

<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>
1261	2005142581	1291	2151685171
1262	2009916728	1292	2156689088
1263	2014698447	1293	2161700757
1264	2019487744	1294	2166720184
1265	2024284625	1295	2171747375
1266	2029089096	1296	2176782336
1267	2033901163	1297	2181825073
1268	2038720832	1298	2186875592
1269	2043548109	1299	2191933899
1270	2048383000	1300	2197000000
1271	2053225511	1301	2202073901
1272	2058075648	1302	2207155608
1273	2062933417	1303	2212245127
1274	2067798824	1304	2217342464
1275	2072671875	1305	2222447625
1276	2077552576	1306	2227560616
1277	2082440933	1307	2232681443
1278	2087336952	1308	2237810112
1279	2092240639	1309	2242946629
1280	2097152000	1310	2248091000
1281	2102071041	1311	2253243231
1282	2106997768	1312	2258403328
1283	2111932187	1313	2263571297
1284	2116874304	1314	2268747144
1285	2121824125	1315	2273930875
1286	2126781656	1316	2279122496
1287	2131746903	1317	2284322013
1288	2136719872	1318	2289529432
1289	2141700569	1319	2294744759
1290	2146689000	1320	2299968000

Rad.	Cub.	Rad.	Cub.
1321	230519 9161	1351	2465846 551
1322	23104382 48	1352	24713262 08
1323	231568 52 67	1353	247681 39 77
1324	23209402 24	1354	24823098 64
1325	232630 31 25	1355	2487813 8 75
1326	2331473 976	1356	24933260 16
1327	233675 27 83	1357	24988462 93
1328	2342039 552	1358	25043747 12
1329	23473342 89	1359	25099112 79
1330	23526370 00	1360	2515456 000
1331	235794 76 91	1361	252100 88 81
1332	23632 663 68	1362	25265699 28
1333	23685930 37	1363	25321391 47
1334	23739 27704	1364	25377165 44
1335	237927 03 75	1365	2543302 125
1336	238462 10 56	1366	2548895 896
1337	2389979 753	1367	2554497 863
1338	23953464 72	1368	25601080 32
1339	24007212 19	1369	25657264 09
1340	2406104 000	1370	25713530 00
1341	24114948 21	1371	257698 78 11
1342	2416893 688	1372	25826308 48
1343	24223006 07	1373	25882 82 117
1344	242771 55 84	1374	2593941 624
1345	243313 86 25	1375	25996093 75
1346	24385697 36	1376	2605285 3 76
1347	24440089 23	1377	26109696 33
1348	24494561 92	1378	261666 21 52
1349	24549115 49	1379	2622362 939
1350	2460375000	1380	2628072 000

Rad.	Cub.	Rad.	Cub.
1381	26337893 41	1411	28091895 31
1382	2639514 968	1412	2815166 52 8
1383	26452488 87	1413	2821151 997
1384	26509911 04	1414	28271459 44
1385	26567416 25	1415	2833148 3 75
1386	2662500 456	1416	2839159 29 6
1387	266826 76 03	1417	28451787 13
1388	2674403 072	1418	28512066 32
1389	2679826 869	1419	2857243 0 59
1390	26856190 00	1420	28632880 00
1391	26914294 71	1421	28693414 61
1392	269722 82 88	1422	28754034 48
1393	27030454 57	1423	28814739 67
1394	27088709 84	1424	28875530 24
1395	27147048 75	1425	28936406 25
1396	272054 71 36	1426	28997367 76
1397	27263977 73	1427	29058414 83
1398	27322567 92	1428	29119547 52
1399	273812 41 99	1429	29180765 89
1400	27440000 00	1430	29242070 00
1401	27498842 01	1431	29303459 91
1402	27557768 08	1432	29364935 68
1403	27616778 27	1433	29426497 37
1404	27675872 64	1434	29488145 04
1405	2773505 125	1435	29549878 75
1406	277943 1416	1436	29611698 56
1407	278536 61 43	1437	29673604 53
1408	279130 93 12	1438	29735596 72
1409	27972609 29	1439	29797675 19
1410	28032210 00	1440	29859840 00

<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>	<i>Rad.</i>	<i>Cub.</i>
1441	2992209121	1471	3183010111
1442	2998442888	1472	3189506048
1443	3004685307	1473	3196010817
1444	3010936384	1474	3202524424
1445	3017196125	1475	3209046875
1446	3023464536	1476	3215578176
1447	3029741623	1477	3222118333
1448	3036027392	1478	3228667352
1449	3042321849	1479	3235225239
1450	3048625000	1480	3241792000
1451	3054936851	1481	3248367641
1452	3061257408	1482	3254952168
1453	3067586677	1483	3261545587
1454	3073924664	1484	3268147904
1455	3080271375	1485	3274759125
1456	3086626816	1486	3281379256
1457	3092990993	1487	3288008003
1458	3099363912	1488	3294646272
1459	3105745579	1489	3301293269
1460	3112136000	1490	3307949000
1461	3118535181	1491	3314613771
1462	3124943128	1492	3321287488
1463	3131359847	1493	3327970157
1464	3137785344	1494	3334661784
1465	3144219625	1495	3341362375
1466	3150662696	1496	3348071936
1467	3157114563	1497	3354790473
1468	3163575232	1498	3361517992
1469	3170044709	1499	3368254499
1470	3176525000	1500	3375000000

C A P. VIII.

De Constructione Tabularum præcedentium.

Quamvis usum per universam Mathesin habeant Tabulæ Quadratorum & Cuborum, nemini latere poterit, quin vel mediocriter isti studio applicuit animum, cum ejus vix ulla reperiatur pars, quæ illis destitui se patiantur. Nec minus etiam constat quantum temporis spatium consumat tædiosus iste multiplicationis labor, quem unum tantum Quadratum, (ut de Cubo taceam) requirit, præsertim si Radix tribus aut quatuor constet notis, quam multiplicationem festinanti calamo haud raro cum errore excidere experientia docet.

Eo itaque libentiori animo Tabulas hæc adjungere volui; tum ut antea obligatam liberarem fidem; tum ut in Studiis Mathematicis sese exercentium tempori consulere & labori, quem Quadratis & Cubis jam ex nostris Tabulis desumtis majori cum fructu aliis rebus impendere poterunt.

Si autem hæ Tabulæ jam constructæ magnum nobis exhibeant commodum, non minori certe jucunditate afficiet nos artificium, quo illæ breviter & fere absque multiplicatione (notabili saltem) construi possint.

Illud duabus regulis absolvemus, quarum una Quadratorum, altera Cuborum inserviet Generationi; ipsas autem Regulas non demonstrabimus, non nisi ex Potestatibus Algebraicis deductas; quarum fundamenta cum hic non sint jacta, istarum certe Regularum demonstrationes nullo cum fructu adduci poterunt.

Regula Quadratorum.

Quadratum jam inventum, ejusdem Quadrati radicem, & numerum istam radicem unitate excedentem adde in unam Summam, & habebis quadratum ejusdem numeri.

Quæ Regula hoc modo ad praxin deducitur incipiendo ab unitate seu 1: quod ut citra necessitatem sic propter facilitatem fieri sciat Lector: cum perinde sit a quonam quadrato fiat initium; Sed cum tabulæ ipsæ ab unitate incipiant, illum numerum reliquorum agmen ducere in Constructione haud incongruum videtur.

Radices

Quadrata.

$$1 \text{ ————— } \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ □tum.} \\ 1 \text{ Ejus Radix} \\ 2 \text{ Numerus sequens A.} \end{array} \right.$$

$$2 \text{ ————— } \left\{ \begin{array}{l} 4 \text{ □tum numeri A.} \\ 2 \text{ Ejus Radix.} \\ 3 \text{ Num: sequens B.} \end{array} \right.$$

$$3 \text{ ————— } \left\{ \begin{array}{l} 9 \text{ □tum numeri B.} \\ 3 \text{ Radix} \\ 4 \text{ Num: seq: C.} \end{array} \right.$$

$$4 \text{ ————— } \left\{ \begin{array}{l} 16 \text{ □tum num: C.} \\ 4 \text{ Radix.} \\ 5 \text{ Num: seq: D} \end{array} \right.$$

$$5 \text{ ————— } \left\{ \begin{array}{l} 25 \text{ □tum num: D} \\ 5 \text{ Radix} \\ 6 \text{ Num: seq: E.} \end{array} \right.$$

$$6 \text{ ————— } 36. \text{ □tum num: E.}$$

Et sic poro.

Regula

Regula Cuborum.

Cubi primi Radicem ejusque Radicis. Quadratum adde in unam summam, eamque per 3 multiplica; Producto adde Unitatem; hanc Summam adde Cubo præcedenti, & habebis Cubum sequentem quæsitum.

Cuius Praxis sic se habet.

Radices	Quadrata	Cubi.
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64

1	+	1		
2				
3				
6	+	1	...	7

2	+	4		
6				
3				
18	+	1	...	19

3	+	9		
12				
3				
36	+	1	...	37

4	+	16		
20				
3				
60	+	1	...	61